A ECONOMETRIA E O PLANEJAMENTO ECONÔMICO

JESSÉ MONTELLO
Chefe da Divisão de Estatística e Atuária
do Departamento Econômico do BNDE

INTRODUÇÃO

No presente trabalho trataremos do papel da econometria como instrumento para o estabelecimento de normas a serem observadas no planejamento do desenvolvimento econômico. A econometria, que reúne em um só corpo de doutrina os modernos conhecimentos da análise matemática, da inferência estatística e da economia, através seus métodos, permite-nos ter uma visão de conjunto das variáveis fundamentais que descrevem os fenômenos econômicos, estabelecendo interrelações entre elas. O conjunto dessas relações, quando escritas em forma de equações estocásticas, constitui um modêlo econométrico que nos permite verificar, de modo tão perfeito quanto possível, as alterações que se verificam em algumas variáveis quando as outras sofrem modificações, ditadas, por exemplo, por uma determinada política econômica. Para o planejamento econômico são necessários os estudos de modelos nos quais figuram as variáveis macro-econômicas.

CONCEITO DE MODÊLO

Conforme vimos acima, um modêlo é uma idealização, em forma matemática, das diversas relações entre as variáveis que entram em jôgo em um fenômeno. Em um modêlo apenas podemos considerar as variáveis fundamentais, tendo em vista que, em geral, o conjunto de tôdas aquelas que influenciam o fenômeno é infinito e seria, portanto, impossível considerá-las em sua totalidade.

Há, na ciência, inúmeros exemplos de modelos. Em geral, um modêlo constitui o ponto de partida para o estudo de uma teoria. Assim, a Geometria e o Cálculo de Probabilidades são modelos. A Geometria é um modêlo que foi estabelecido inicialmente para medir áreas de terrenos e volume dos sólidos. Êsse modêlo parte de certas noções primitivas e de relações entre elas denominadas postulados, que podem ser escritos em forma de equações matemáticas. O Cálculo de Probabilidade é outro exemplo de modêlo especialmente construído para estudar certos fenômenos, chamados **fenômenos aleatórios**, que apresentam o que se denomina **regularidade estatística.** Para o tratamento exato dêsse modêlo, também chamado Teoria das Probabilidades, parte-se de um conjunto de noções abstratas que são designadas para a interpretação das freqüências relativas que se apresentam nos fenômenos mencionados. As relações entre essas noções, que constituem os Postulados dos Cálculos de Probabilidades, foram dadas de forma explícita por Kolmogoroff. No Cálculo de Probabilidade, o dualismo entre noções empíricas e teóricas assume a forma de freqüência e distribuições observadas de um lado, probabilidades e distribuição de probabilidades do outro. Do ponto-de-vista das aplicações, uma distribuição de probabilidade refere-se a um fenômeno aleatório, tal que cada observação X compreende n medidas.

$$X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

Considerando-se essa observação como um ponto do espaço euclidiano E_n, n — dimensional, um conjunto C de pontos dêsse espaço é chamado um **evento** ou **acontecimento aleatório.** Os próprios pontos X são chamados **eventos elementares.** A definição de probabilidade envolve um conjunto de três elementos (E_n, T, P), denominado **corpo de probabilidade.** E_n é o espaço dos eventos elementares, T é a família de eventos C para os quais são assinaladas probabilidades e P é uma função de conjunto P (C) que nos fornece a probabilidade de cada evento C. A noção de variável aleatória surge como uma função de um evento elementar:

$$g = g\ (X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

Para caracterizar esta função como variável aleatória é necessário que, para qualquer número real r, o evento constituído pelo conjunto de pontos $X = (X_1, \ldots, X_n)$ do espaço E_n que satisfaça a relação:

$$g(X_1, X_2, \ldots, X_n) \leq r,$$

pertença à família T dos pontos para os quais são definidas probabilidades através da função de conjunto P.

O USO DE MODELOS PARA ESTUDO DOS FENÔMENOS ECONÔMICOS

Modernamente, para o estudo dos fenômenos econômicos estabelece-se um modêlo matemático relacionando as variáveis que nêles entram em jôgo. As formas que assumem as diversas equações do modêlo podem ser simples definições tiradas da teoria econômica, ou relações ditadas pela própria teoria ou resultantes da análise estatística de dados empíricos. Em virtude da impossibilidade de considerar tôdas as variáveis que têm influência sôbre o fenômeno, a ação conjunta de tôdas as variáveis abandonadas em regra podem ser representadas por variáveis aleatórias, (*) o que acarreta considerar algumas das fundamentais como aleatórias. As equações do modêlo são assim estocásticas.

Como se pode verificar pelo que dissemos acima, essas equações constituem hipóteses relacionando as variáveis, e contêm parâmetros a serem estimados pela estatística. O raciocínio sôbre modelos permite verificar as conseqüências lógicas dessas hipóteses, confrontá-las com os resultados da experiência, chegar, assim, a melhor conhecer a realidade, e de agir mais eficàzmente sôbre ela.

PROBLEMAS ESTATÍSTICOS QUE SE APRESENTAM AO ESTABELECER UM MODÊLO

Um modêlo é, então, constituído por um conjunto de hipóteses sôbre as variáveis que têm influência sôbre o fenômeno estudado. A fixação das formas matemáticas das equações de um modêlo constitui a primeira questão da análise estatística dos dados que servem de apoio empírico ao estudo do fenômeno. É, portanto, o primeiro passo da análise estatística dos dados observados. Um dos problemas que se impõe logo de início é o de saber-se se o modêlo estabelecido é a contrapartida teórica do que se verifica na realidade, ou seja, é o da adequação do modêlo às observações. Através das conseqüências que podem ser obtidas usando o modêlo e o seu confronto com os dados da experiência, empregando testes estatísticos constituídos com êsse objetivo, podemos inferir a adequação mencionada. Deve-se ter presente que, se testes estatísticos mostrarem que êle não está se conformando à realidade deverá ser o mesmo abandonado ou, pelo menos, alteradas algumas de suas equações.

Como as formas dessas equações contêm parâmetros desconhecidos, devem ser êles estimados, surgindo, assim, o segundo problema da inferência estatística, que é o problema da estimação.

Além dêsses problemas, temos o de distribuição, que permite conhecer as distribuições de probabilidade dos estimadores dos parâmetros que figuram no modêlo. Aquelas distribuições de probabilidade são também empregadas para testar hipóteses sôbre os valores dos parâmetros.

VARIÁVEIS ENDÓGENAS E EXÓGENAS

As variáveis fundamentais contidas no modêlo são classificadas em dois tipos — **endógenas** e **exógenas** — segundo elas sejam ou não objeto da explicação pelo modêlo aludido. As primeiras são consideradas determinadas pelo fenômeno que o modêlo traduz, ao passo que as últimas são tomadas independentemente. Assim as variáveis endógenas são determinadas pela simultânea interação das relações no modêlo, enquanto que as variáveis exógenas são aquelas cujos valores são determinados fora do modêlo. Sôbre as exógenas podemos agir diretamente. Elas são, por exemplo, os impostos e os investimentos autônomos que podem ser modificados tendo em vista uma política econômica. O modêlo procura mostrar como se comportam as variáveis endógenas

(*) Quando isso não acontece, é um indício de que nas equações do modêlo não estão consideradas tôdas as variáveis que têm influência marcante sôbre o fenômeno em estudo, ou sejam, aquelas que denominamos de fundamentais.

em função das exógenas, em virtude de o modêlo, pelas razões já mencionadas, conter obrigatòriamente variáveis aleatórias para indicar a ação conjunta sôbre o fenômeno de tôdas aquelas que não estão explìcitamente consideradas. Em regra as endógenas são consideradas variáveis aleatórias. (*)

Como exemplo tomemos o modêlo keynesiano elementar, destinado a dar uma explicação perfuntória do nível de produção e, portanto, do nível de emprêgo, com base nas seguintes idéias:

a) as decisões de investir são em grande parte autônomas, o que podemos concluir tendo em vista que os grandes projetos necessitam do acôrdo do Poder Público e de uma decisão política. Além disso, na indústria é geralmente possível antecipar ou diferir a instalação de novos equipamentos. Apesar de uma parte dos investimentos ser conseqüência de evolução da produção, a compreensão do equilíbrio do sub-emprêgo é facilitada acentuando-se o caráter autônomo, ao invés do caráter induzido, dos investimentos;

b) o investimento acarreta diretamente um acréscimo de produção do setor de bens de equipamento. Essa produção suplementar é acompanhada indiretamente pelas distribuições de rendas em forma de salários e dividendos. Essas novas rendas, por seu turno, acarretam um aumento das despesas privadas e, portanto, da produção nos setores que fabricam bens de consumo.

Essas considerações nos conduzem ao seguinte modêlo:

$$(1) \qquad \begin{aligned} Y &= C + I + u_1 \\ C &= f\,(y) + u_2 \\ I &= \text{autônomo} \end{aligned}$$

onde o investimento I foi admitido autônomo, e Y e C representam, respectivamente, a renda distribuída e o consumo. As variáveis aleatórias u_1 e u_2 denotam a influência das outras variáveis que não foram consideradas.

Neste modêlo a única variável exógena é I, as outras variáveis Y e C são endógenas e, portanto, aleatórias.

(*) Em certos modelos algumas das variáveis exógenas são aleatórias.

MODELOS DETERMINATIVOS E ESTOCÁSTICOS

Pelo que vimos acima, nos modelos destinados a descrever a realidade econômica, as equações são estocásticas. Êsses modelos são, por isso, denominados **estocásticos.** Além dêsse tipo de modêlo, aparecem na literatura econômica os chamados modelos determinísticos, que podemos considerar resultantes dos estocásticos, substituindo as variáveis endógenas pelas suas esperanças matemáticas, ou valores médios, e desprezando as variáveis aleatórias que denotam a influência de tôdas as variáveis não fundamentais, considerando-as, portanto, com esperança matemática igual a zero. Assim, um modêlo determinístico relaciona os valores médios das variáveis endógenas com os correspondentes das variáveis exógenas.

O modêlo determinístico correspondente ao modêlo keynesiano elementar é o seguinte:

$$(2) \qquad \begin{aligned} \overline{Y} &= \overline{C} + I \\ \overline{C} &= f(\overline{Y}) \end{aligned}$$

onde $\overline{Y}$ e $\overline{C}$ representam as esperanças matemáticas das variáveis Y e C, respectivamente, isto é:

$$\begin{aligned} \overline{Y} &= E(Y) \\ \overline{C} &= E(C), \end{aligned}$$

onde E representa o operador esperança matemática.

Os modelos determinísticos, embora mais simples para o tratamento matemático do que os estocásticos, não permitem obter uma descrição satisfatória da realidade. Por isso, a tendência atual é abandoná-los definitivamente.

Das equações (2), supondo:

$$f(\overline{y}) = a\,\overline{y} + b,$$

obtem-se:

$$\overline{Y} = \frac{I}{1-a} + \frac{b}{1-a}$$

que permite explicar a produção em função do Investimento, suposto autônomo. Nessa equação $0 < a < 1$ e $b > 0$. O coeficiente $\frac{1}{1-a}$ é o **multiplicador** de Keynes e o coeficiente "a" chama-se **propensão marginal a consumir.**

MODELOS ESTÁTICOS E DINÂMICOS

As equações de um modêlo freqüentemente contém variáveis endógenas e exógenas referidas a períodos de tempo distintos, ou seja, além das variáveis relativas a um período t, contêm, também, as correspondentes a períodos anteriores, chamadas **variáveis retardadas.** Um modêlo em que êsse fato ocorre, é um modêlo dinâmico, porque permite exprimir as variáveis endógenas referidas a um período de tempo t como função das variáveis endógenas e exógenas retardadas, denominadas variáveis predeterminadas. Os modelos estáticos são definidos, em contraposição aos dinâmicos, como aquêles que não contêm variáveis retardadas.

FORMA GERAL DE UM MODÊLO

Adotando-se a seguinte notação:

$Y_{1,t}\ ,\ Y_{2,t}\ ,\ \ldots\ ,\ Y_{n,t}$ designam as variáveis endógenas relativas ao período t;

$Z_{1,t}\ ,\ Z_{2,t}\ ,\ \ldots\ ,\ Z_{n,t}$ designam as variáveis exógenas relativas ao período t;

$U_{1,t}\ ,\ U_{2,t}\ ,\ \ldots\ ,\ U_{n,t}$ designam as variáveis aleatórias do modêlo;

podemos escrever as equações do modêlo do seguinte modo:

$$(3)\qquad f_i(Y_{1,t}, \ldots, Y_{n,t}, Y_{1,t-1}, \ldots, Y_{n,t-1}, \ldots, Y_{1,t-p}, \ldots Y_{n,t-p}, Z_{1,t}, \ldots Z_{n,t}) = U_{i,t}\ ;\ i = 1,2, \ldots, n,$$

onde p é o retardamento máximo nas variáveis endógenas.

As relações estocásticas (3) são as equações estruturais (*) do modêlo e devem ser em número igual ao de variáveis endógenas não retardadas ou seja, n, desde que o seguinte jacobiano:

$$\frac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(Y_{1,t}, \ldots, Y_{n,t})} \neq 0,$$

seja diferente de zero, porque sòmente nesse caso podemos exprimir as variáveis endógenas em função das variáveis predeterminadas.

Quando conhecemos a distribuição conjunta das variáveis aleatórias

$$U_{1,t}\ ,\ U_{2,t}, \ldots\ ,\ U_{n,t}$$

as equações (3) representam a estrutura do sistema econômico. As funções f_i representam, por exemplo, as relações estruturais seguintes: função de produção, função de consumo, função de investimento, etc. Os parâmetros das funções (3) são denominados **parâmetros** ou **coeficientes estruturais** e significam econômicamente produtividade marginal, propensão marginal ao consumo e propensão marginal à inversão, etc.

Quando o sistema (3) é linear, as equações estruturais podem ser escritas do seguinte modo:

$$(4)\qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, Y_{j,t} + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\, Y_{j,t-1} + \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, Z_{jt} = U_{i,t}, \qquad i = 1,2, \ldots, n,$$

onde só consideramos as variáveis retardadas de um período. Êsse sistema escrito em forma matricial, assume o aspecto:

$$(4')\qquad A\ Y_t + B\ Y_{t-1} + C\ Z_t = U_t$$

onde A, B, C designam as matrizes:

$$A = \{a_{ij}\}\ ,\ B = \{b_{ij}\}\ ,\ C = \{c_{ij}\}$$
$$i,j = 1,2, \ldots, n.$$

e Y_t , Y_{t-1} , Z_t , U_t são os vetores colunas

(*) As equações (3) denominam-se relações *estruturais* porque as relações entre as variáveis dependem nessas equações da estrutura do sistema econômico considerado.

$$Y_t = \begin{Bmatrix} Y_{1t} \\ \vdots \\ Y_{nt} \end{Bmatrix}, \quad Y_{t-1} = \begin{Bmatrix} Y_{1,t-1} \\ \vdots \\ Y_{n,t-1} \end{Bmatrix}, \quad Z_t = \begin{Bmatrix} Z_{1,t} \\ \vdots \\ Z_{n,t} \end{Bmatrix}, \quad U_t = \begin{Bmatrix} U_{1t} \\ \vdots \\ U_{nt} \end{Bmatrix}$$

MODELOS INTERDEPENDENTES E RECURSIVOS

Um sistema é interdependente se duas das variáveis endógenas relativas ao período t, que figuram nas equações estruturais, têm comportamento recíproco no sentido de que elas aparecem em duas equações distintas que permitem a sua determinação recíproca: há assim uma inter-ação ou inter-dependência entre as variáveis. Por exemplo, o modêlo keynesiano elementar mencionado, cujas equações estruturais são:

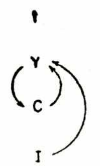
$$Y_t = C_t + I_t + U'_t$$

$$C_t = f(Y_t) + U''_t$$

é interdependente porque há um comportamento recíproco entre as variáveis Y_t e C_t, como se pode ver por um sistema de setas usado para indicar o sentido da interação entre as variáveis.

$$Y_t = C_t + I_t + U'_t$$

$$C_t = f(Y_t) + U''_t$$

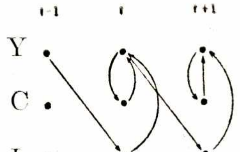


Também é interdependente o seguinte modêlo, em que tôdas as variáveis são endógenas:

$$Y_t = C_t + I_t$$

$$C_t = f(Y_t) + U'_t$$

$$I_t = g(Y_{t-1}) + U''_t$$



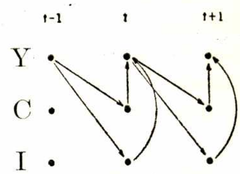
No diagrama de setas, representativo da interdependência entre as variáveis, quando se trata de um sistema interdependente, algumas aparecem em sentido contrário ligando pares de variáveis que têm comportamento recíproco.

No caso do modêlo recursivo não há duas setas de sentido contrário ligando pares de variáveis, como se pode verificar pelo exemplo seguinte:

$$Y_t = C_t + I_t$$

$$C_t = f(Y_{t-1}) + U'_t$$

$$I_t = g(Y_{t-1}) + U''_t$$

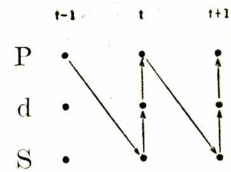


O seguinte modêlo, conhecido como modêlo de teia de aranha, que dá três relações hipotéticas entre a demanda d, a oferta s e o preço p, é também recursivo.

$$d_t = f(P_t) + U'_t$$

$$S_t = g(P_{t-1}) + U''_t$$

$$S_t = d_t$$



Observando êsses dois últimos modelos, podemos dar a seguinte definição devida a E. Malinvaud. (*)

"Um modêlo é dito recursivo se existe uma ordem das variáveis endógenas e uma das equações tal que a i — ésima equação possa ser considerada como descrevendo a determinação do valor tomado pela i — ésima variável endógena durante o período t, em função dos valores das variáveis predeterminadas e das variáveis endógenas de ordem inferior a i. Um modêlo é dito interdependente se não é recursivo."

No diagrama de setas, isso significa que, quando o modêlo é recursivo, é possível ordenar as variáveis de tal modo que tôdas as setas, dentro do período t, apontem no mesmo sentido.

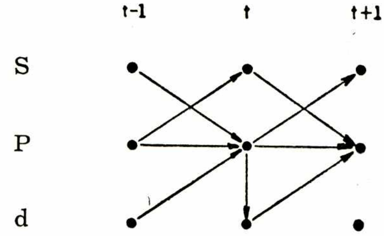
Consideramos, agora, o modêlo:

$$d_t = f(P_t) \quad , \quad S_t = g(P_{t-1}) \quad , \quad P_t = P_{t-1} + h(d_{t-1} - S_{t-1}) \quad ,$$

que dá três relações hipotéticas entre a demanda d, a oferta s e o preço p. O índice t refere-se ao tempo e descreve períodos consecutivos, t = 1, 2, 3, ... Pelo diagrama de setas se verifica imediatamente que êle é

(*) Veja E. Malinvaud, Méthode Statistique de l"econometrie, pág. 64.

recursivo. De fato, tem-se o seguinte gráfico:



A importância principal da classificação dos modelos em interdependentes e recursivos, reside no fato de que os métodos de estimação estatística são distintos, conforme se trate de um ou de outro tipo de modêlo.

PROBLEMAS DE IDENTIFICAÇÃO

Quando é possível resolver com respeito às variáveis endógenas as equações estruturais de (3), obtemos a sua forma reduzida, que expressa aquelas variáveis em função das pre-determinadas.

Os métodos de estimação estatística e, em particular, a análise de regressão, permitem estimar os parâmetros que figuram na forma reduzida do modêlo. Para avaliar os coeficientes estruturais, devemos então utilizar as relações entre êsses coeficientes e os parâmetros do modêlo reduzido.

Quando o sistema constituído por essas relações fôr determinado, diz-se que o modêlo estrutural é identificado. Se, porém, fôr indeterminado, não é, em geral, possível, com auxílio da forma reduzida, determinar a estrutura do modêlo. Freqüentemente pode-se, por considerações econômico-teóricas ou experimentais, estabelecer entre os coeficientes estruturais certas relações que tornem o sistema mencionado determinado e, portanto, identificado o modêlo estrutural. Se as relações suplementares estabelecidas tornam o sistema superabundante o modêlo será super-identificado.

Consideramos, para fixar idéias, que o sistema estrutural tenha a forma (4'):

$$(4') \quad A\ Y_t + B\ Y_{t-1} + C\ Z_t = U_t$$

Se a matriz A é não singular, resulta:

$$Y_t = -A^{-1} B\ Y_{t-1} - A^{-1} C\ Z_t + A^{-1} U_t$$

Fazendo-se:

$$(5) \quad G = A^{-1}B, H = -A^{-1}C \text{ e } A^{-1}U_t = v_t$$

tem-se:

$$(4'') \quad Y_t = G\ Y_{t-1} + H\ Z_t + v_t ,$$

que é a forma reduzida do modêlo estrutural (4').

As duas primeiras equações matriciais (5) podem ser escritas do seguinte modo:

$$(5') \quad A\,G + B = 0 \quad ; \quad A\,H + C = 0$$

e relacionam os parâmetros das equações reduzidas com os coeficientes estruturais.

O número dos coeficientes estruturais que figuram na equação (4'), é

$$(n-1)\,n + n^2 + n.n = (n-1)\,n + n\,(m+n),$$

tendo em vista que é possível tomar como unidade um dêles, ao passo que o número de parâmetros que figuram no modêlo reduzido é n (n + m). Por conseguinte, as equações (5') são indeterminadas, e o sistema não será identificado. Para torná-lo identificável será necessário impor **a priori** (n — 1) n relações entre os coeficientes estruturais.

OPORTUNIDADE DO EMPRÊGO DOS PROCESSOS ESTOCÁSTICOS NOS MODELOS ECONOMÉTRICOS

As variáveis aleatórias, que constam dos modelos econométricos, em regra, são funções do tempo. Por conseguinte, podemos supor pertencentes a um processo estocástico. De fato **um processo estocástico é uma família infinita de variáveis aleatórias**

$$\{Y_t \ ; \ t \in T\}.$$

DEFINIÇÃO DE UM PROCESSO ESTOCÁSTICO

Diz-se que **um processo estocástico**

$$\{X_t \ ; \ t \in T\}$$

é definido quando, para cada sub-conjunto finito do conjunto infinito T,

$$(t_1,\ t_2, \ldots,\ t_n),$$

é conhecida a função de distribuição conjunta da variável aleatória multidimensional

$$(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n}),$$

que representaremos por

$$F_{t_1,\, t_2, \ldots,\, t_n}\,(x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n)$$

Além disso, essa função de distribuição satisfaz à seguinte condição de compatibilidade de Kolmogoroff:

Se $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ é um sub-conjunto de T e $n < m$, a variável aleatória

$$(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n})$$

é uma variável marginal da variável

$$(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_m}),$$

isto é:

$$F_{t_1, \ldots, t_n}(x_1, \ldots, x_n) = F_{t_1, \ldots, t_n, \ldots, t_m}(x_1, \ldots, x_n, \infty, \ldots, \infty)$$

A variável t chama-se variável tempo. Quanto T é o conjunto de todos os inteiros $\ldots -1, 0, +1, \ldots$, diz-se que o processo é uma **seqüência** ou um **processo estocástico com parâmetro tempo discreto.** Se é um intervalo o processo é dito com **parâmetro tempo contínuo.**

Designando-se por X_t uma determinação da variável aleatória X_t do processo estocástico mencionado, o conjunto numérico infinito, $\{x_t ; t \in T\}$ denomina-se **realização do processo.**

Quando o processo é discreto, as suas realizações parciais $x_1, x_2, \ldots, x_n$ constituem séries de tempo.

FUNÇÕES VALOR MÉDIO E COVARIÂNCIA DE UM PROCESSO ESTOCÁSTICO

A função valor médio é definida por $EX_t = m_t$, onde o símbolo E representa a esperança matemática, e a função covariância por:

$$c_{t,s} = E(X_t X_s) - m_t m_s \quad ; \quad t, s \in T$$

Quando $s = t$, tem-se a função variância do processo:

$$\sigma_t^2 = E(X_t^2) - m_t^2 \quad , \quad t \in T$$

A função covariância mede, em certo sentido, a dependência entre as variáveis aleatórias ligadas ao processo para diferentes valores t.

Com base nessas características, podemos definir o coeficiente de auto-correlação do processo pela expressão:

$$\rho_{t,s} = \frac{c_{t,s}}{\sigma_t \sigma_s}$$

PROCESSO ESTOCÁSTICO ESTACIONÁRIO

Diz-se que um processo estocástico

$$\{X_t ; t \in T\}$$

é estacionário em sentido restrito quando qualquer conjunto finito:

$$(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n})$$

de variáveis aleatórias da família X_t, $t \in T$, tem a mesma função de distribuição que a variável n — dimensional:

$$(6) \quad (X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, \ldots X_{t_n+h})$$

para qualquer h, desde que

$$t_1 + h, \; t_2 + h, \ldots, t_n + h$$

sejam pontos de T. Assim, as distribuições conjuntas das variáveis (6), para diferentes valores h, são eqüivalentes e dependem sòmente das diferenças de tempo:

$$t_2 - t_1, \; t_3 - t_2, \ldots, t_n - t_{n-1} .$$

Resulta dessa definição que nos processos estacionários, tem-se:

$$E X_t = m \quad , \quad \sigma_t^2 = \sigma^2$$

sendo m e σ^2 constantes, ou seja, as funções média e variância são independentes do tempo. Essa propriedade é usada para definir os processos estocásticos estacionários em sentido amplo.

Como a função de distrtibuição conjunta da variável bidimensional (X_t, X_s) depende sòmente da diferença t-s, segue-se que a função covariância do processo estacionário é sòmente função da diferença t-s, isto é:

$$c_{t,s} = c_{t-s} = c_n ,$$

sendo:

$$n = t\text{-}s$$

Daí resulta que os coeficientes da autocorrelação dependem sòmente da diferença t-s, isto é:

$$\rho_{t,s} = \rho_n = \frac{c_n}{\sigma^2}$$

FUNÇÃO ESPECTRAL

Demonstra-se, na teoria dos processos estocásticos estacionários, que existe uma função F (t), monótona, não decrescente, tal que:

$$c_n = \int_{-\pi}^{\pi} e^{int} d\,F(t)\,,\ n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots;\ F(-\pi) = 0,\ F(\pi) = \sigma^2,$$

quando o processo é discreto, e:

$$c_n = \int_{-\infty}^{\infty} e^{int} d\,F(t), F(-\infty) = 0, F(+\infty) = \sigma^2,$$

se o processo é contínuo.

A função F (t) denomina-se função de distribuição espectral e, sua derivada, quando existe, é a função de densidade espectral. Essas funções permitem caracterizar o processo estacionário.

REPRESENTAÇÃO ORTOGONAL DE UM PROCESSO ESTACIONÁRIO

O Professor Herald Cramér demonstrou que todo processo estacionário pode ser expresso por meio de uma integral estocástica,

$$X_t = \int_{-\pi}^{\pi} e^{itx}\, dZ(x),$$

quando o processo é discreto e:

$$X_t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, dZ(x),$$

quando é contínuo, onde

$$\{Z(x),\ -\infty < x < +\infty\}$$

é um processo estacionário particular de variáveis aleatórias complexas, denominado **processos de acréscimos ortogonais,** que tem as seguintes propriedades:

$$E\{[Z(x_1) - Z(x_2)]\,[Z(x_3) - Z(x_4)]\} = 0,\ \text{se}\ x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq x_4$$

$$E\{|Z(x_1) - Z(x_2)|^2\} = F(x_1) - F(x_2)\quad,\quad x_1 \geq x_2,$$

sendo F (x) a função espectral do processo

$$\{X_t\,,\ t \in T\}$$

TIPOS GERAIS DE PROCESSOS ESTACIONÁRIOS

Os principais tipos de processos estacionários usados nas aplicações econométricas, são:

a) Processo aleatório puro;
b) Processo auto-regressivo;
c) Processo de médias móveis;
d) Processo harmônico;
e) Processo de periodicidades ocultas.

a) **Processo aleatório puro:**

Em um processo aleatório puro as variáveis aleatórias são independentes e têm a mesma função de distribuição. É imediato que, nesse processo a função covariância é:

$$c_n = 0,\quad n = \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

e a função densidade espectral para o processo discreto é:

$$f(x) = \frac{\sigma^2}{2\pi}$$

b) **Processo auto-regressivo:**

Considere-se uma equação de diferenças estocásticas de ordem h com coeficientes reais constantes:

(7) $X_t + b_1 X_{t-1} + \ldots + b_h X_{t-h} = Y_t,$

onde Y_t pertence a um processo aleatório puro de média zero e variância σ^2.

A equação (7) define uma variável aleatória X_t, que quando pertencente a um processo estacionário, êste recebe a denominação de processo **auto-regressivo.**

Para obter a solução de (7), consideramos a equação homogênea associada:

(8) $X_t + b_1 X_{t-1} + \ldots + b_h X_{t-h} = 0,$

que tem para equação característica:

(9) $Z^h + b_1 Z^{h-1} + \ldots + b_h = 0$

Para simplificar o tratamento matemático, vamos supor que as raízes desta equação são simples e que tôdas são pontos interiores do círculo unidade $|Z| \leq 1$, isto é:

$|Z_1| < 1, |Z_2| < 1, \ldots, |Z_h| < 1.$

A solução geral da (8) é, portanto:

$$(10) \qquad X_t = \sum_{j=1}^{h} A_j Z_j^t ,$$

onde os A_j, $j = 1, 2, \ldots, h$ são constantes.

Uma solução particular da equação (7) se obtem formalmente, considerando a série de variáveis aleatórias:

$$(11) \quad X_t = a_0 Y_t + a_1 Y_{t-1} + a_2 Y_{t-2} \ldots,$$

onde os coeficientes a_1, a_2, ..., satisfazem ao sistema de equações lineares:

$$\begin{aligned}
&a_0 = 1 \\
&a_1 + b_1 = 0, \\
&a_2 + a_1 b_1 + b_2 = 0, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&a_h + a_{h-1} b_1 + a_{h-2} b_2 + \ldots + b_h = 0, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&a_k + a_{k-1} b_1 + a_{k-2} b_2 + \ldots + a_{k-h} b_h = 0, \ (k > h)
\end{aligned}$$

cujas incógnitas a_i, para $i = 1, 2, 3, \ldots$, são unìvocamente determinadas porque o seguinte determinante é diferente de zero:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ b_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ b_2 & b_1 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{h-1} & b_{h-2} & b_{h-3} & \ldots & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Podemos demonstrar que na hipótese admitida acima de que as raízes $Z_1, Z_2, \ldots, Z_h$ sejam pontos interiores do círculo unidade, a série (11) é convergente. Por conseguinte, a solução geral da (7) é:

$$(12) \qquad X_t = \sum_{j=1}^{h} A_j Z_j^t + Y_t + a_1 Y_{t-1} + a_2 Y_{t-2} + \ldots$$

Como o somatório da relação anterior tende a zero, então:

$$(13) \quad X_t = Y_t + a_1 Y_{t-1} + a_2 Y_{t-2} + \ldots.$$

é a solução de regime da (7). A essa mesma conclusão, sòmente com uma maior soma de trabalho chegar-se-ia se a equação característica (9) tivesse raízes múltiplas, interiores ao círculo unidade.

Multiplicando-se ambos os membros de (7) por X_{t+m} e X_{t-m}, respectivamente, e em seguida, determinando-se a esperança matemática dos têrmos das equações assim obtidas, vem:

$$(14) \qquad \rho_m + b_1 \rho_{m+1} + \ldots + b_h \rho_{m+h} = \frac{a_m}{g}, \ m \geq 0, \ a_0 = 1$$

$$\rho_m + b_1 \rho_{m-1} + \ldots + b_h \rho_{m-h} = 0, \ m > 0,$$

onde:

$$g = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + \ldots.$$

A última equação permite construir o correlograma do processo e a penúltima estimar os parâmetros a_m, $m = 1, 2, \ldots$, quando se conhecem os coeficientes de autocorrelação ρ_m, para $m = 0, \pm 1 \pm 2, \ldots$

Notando-se que (14) tem a mesma equação característica que a (7), a sua solução geral será:

$$(15) \qquad \rho m = \sum_{j=1}^{h} B_j Z_j^m ,$$

onde os B_j são constantes a serem determinadas por condições iniciais.

$|Z_1| < 1, |Z_2| < 1, \ldots, |Z_h| < 1.$

A solução geral da (8) é, portanto:

$$(10) \qquad X_t = \sum_{j=1}^{h} A_j Z_j^t,$$

onde os A_j, $j = 1, 2, \ldots, h$ são constantes.

Uma solução particular da equação (7) se obtem formalmente, considerando a série de variáveis aleatórias:

$$(11) \quad X_t = a_0 Y_t + a_1 Y_{t-1} + a_2 Y_{t-2} \ldots,$$

onde os coeficientes $a_1, a_2, \ldots,$ satisfazem ao sistema de equações lineares:

$$\begin{aligned}
&a_0 = 1\\
&a_1 + b_1 = 0,\\
&a_2 + a_1 b_1 + b_2 = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_h + a_{h-1} b_1 + a_{h-2} b_2 + \ldots + b_h = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_k + a_{k-1} b_1 + a_{k-2} b_2 + \ldots + a_{k-h} b_h = 0, \ (k > h)
\end{aligned}$$

cujas incógnitas a_i, para $i = 1, 2, 3, \ldots,$ são unìvocamente determinadas porque o seguinte determinante é diferente de zero:

$$\begin{vmatrix}
1 & 0 & 0 & \ldots & 0\\
b_1 & 1 & 0 & \ldots & 0\\
b_2 & b_1 & 1 & \ldots & 0\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
b_{h-1} & b_{h-2} & b_{h-3} & \ldots & 1
\end{vmatrix} = 1$$

Podemos demonstrar que na hipótese admitida acima de que as raízes $Z_1, Z_2, \ldots, Z_h$ sejam pontos interiores do círculo unidade, a série (11) é convergente. Por conseguinte, a solução geral da (7) é:

$$(12) \qquad X_t = \sum_{j=1}^{h} A_j Z_j^t + Y_t + a_1 Y_{t-1} + a_2 Y_{t-2} + \ldots$$

Como o somatório da relação anterior tende a zero, então:

$$(13) \quad X_t = Y_t + a_1 Y_{t-1} + a_2 Y_{t-2} + \ldots.$$

é a solução de regime da (7). A essa mesma conclusão, sòmente com uma maior soma de trabalho chegar-se-ia se a equação característica (9) tivesse raízes múltiplas, interiores ao círculo unidade.

Multiplicando-se ambos os membros de (7) por X_{t+m} e X_{t-m}, respectivamente, e em seguida, determinando-se a esperança matemática dos têrmos das equações assim obtidas, vem:

$$(14) \qquad \rho_m + b_1 \rho_{m+1} + \ldots + b_h \rho_{m+h} = \frac{a_m}{g}, \ m \geq 0, \ a_0 = 1$$

$$\rho_m + b_1 \rho_{m-1} + \ldots + b_h \rho_{m-h} = 0, \ m > 0,$$

onde:

$$g = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + \ldots.$$

A última equação permite construir o correlograma do processo e a penúltima estimar os parâmetros a_m, $m = 1, 2, \ldots,$ quando se conhecem os coeficientes de autocorrelação ρ_m, para $m = 0, \pm 1 \pm 2, \ldots$

Notando-se que (14) tem a mesma equação característica que a (7), a sua solução geral será:

$$(15) \qquad \rho m = \sum_{j=1}^{h} B_j Z_j^m,$$

onde os B_j são constantes a serem determinadas por condições iniciais.

Se as raízes da (9) são complexas, tem-se:

$$Z_j = P_j\,(\cos\,\theta_j \pm i\ \mathrm{sen}\ \theta_j)$$

onde p_j e θ_j são, respectivamente, o módulo e o argumento do complexo Z_j.

Portanto, a (15) poderá ser escrita:

$$\rho_m = A_0 + \sum_{j=1}^{S} P_j^m\,(B_j'\cos m\ \theta_j + B_j''\ \mathrm{sen}\ m\ \theta_j)$$

onde $S = \left[\frac{h}{2}\right]$, ou seja, o maior inteiro menor que ou igual a $\frac{h}{2}$

Com $|P_j| < 1$, então, $\rho_m \to 0$, quando $m \to \infty$. Os ρ_m compõem-se, assim, de harmônicos amortecidos, e tenderão a zero oscilando em tôrno dêsse valor. A mesma conclusão chegar-se-ia se a (9) tivesse raízes múltiplas.

Um caso que freqüentemente ocorre na prática é aquêle em que a equação (7) é de segunda ordem. Nesse caso, tem-se:

$$X_t + b_1\ X_{t-1} + b_2\ X_{t-2} = Y_t,\ \text{com}\ 4\ b_2 > b_1^2,\ b_2 < 1$$

cuja solução de regime é:

$$X_t = a_0\ Y_t + a_1\ Y_{t-1} + a_2\ Y_{t-2} + \ldots.$$

Pelo que vimos, os coeficientes desta expressão são determinados pelo sistema de equações lineares:

$$(16)\qquad \begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_1 + b_1 &= 0 \\ a_2 + a_1 b_1 + b_2 &= 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_k + a_{k-1} b_1 + a_{k-2} b_2 &= 0 \end{aligned}$$

Donde se obtem:

$$(17)\qquad \begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_1 &= -\ b_1 \\ a_2 &= -\ b_2 + b_1^2 \end{aligned}$$

Observemos que a última equação do sistema (16) é de diferentes fontes nas incógnitas a_k Logo, a sua equação característica é:

$$(18)\qquad Z^2 + b_1 Z + b_2 = 0,$$

que tem as seguintes raízes:

$$(19)\qquad Z = \frac{-b_1 \pm i\sqrt{4 b_2 - b_1^2}}{2},\quad 4 b_2 > b_1^2$$

Escrevendo-se:

$$p = \sqrt{b_2} < 1$$

$$\cos\,\theta = -\frac{b_1}{2\sqrt{b_2}},\quad \mathrm{sen}\ \theta = \frac{\sqrt{4 b_2 - b_1^2}}{2\sqrt{b_2}},$$

tem-se:

$$Z = p\,(\cos\,\theta \pm i\ \mathrm{sen}\ \theta).$$

Portanto, a solução geral de (16) é:

$$(20)\qquad a_k = p^k\,(C\cos\,\theta k + D\ \mathrm{sen}\ \theta\ k),$$

onde as constantes C e D são determinadas pelas condições iniciais (17). Sendo assim, tem-se:

$$C = 1$$

$$D = \cot\,\theta$$

Substituindo-se êsses valores na(20), obtem-se:

$$a_k = \frac{2}{\sqrt{4 b_2 - b_1^2}}\,p^{k+1}\ \mathrm{sen}\ (k+1)\ \theta,$$

que conjugada com a expressão de X_t, resulta a solução do modêlo auto-regressivo particular em exame.

Para obter o correlograma do processo, devemos resolver a seguinte equação de diferenças:

$$\rho_m + b_1\ \rho_{m-1} + b_2\ \rho_{m-2} = 0,$$

que tem também a mesma equação característica (18). Sua solução geral será, por conseguinte:

$$\rho_m = p^m\,(c\ \cos\ m\ \theta + b\ \mathrm{sen}\ m\ \theta),$$

onde as constantes C e D, serão determinadas pelas condições iniciais:

$$\rho_0 = 1$$

$$\rho_1 + b_1 + b_2\ \rho_1 = 0,$$

ou seja:

$$\rho_0 = 1$$

$$\rho_1 = -\frac{b_1}{1 + b_2}$$

Daí se segue que:

$$\rho_m = \frac{p^k}{(1 + p^2) \operatorname{sen} \theta} \left\{ \operatorname{sen} (k + 1) \theta - p^2 \operatorname{sen} (k - 1) \theta \right\} .$$

Desenvolvendo-se

$$\operatorname{sen} (k + 1) \theta \quad e \quad \operatorname{sen} (k - 1) \theta$$

pelas fórmulas conhecidas da trigonometria:

$$\operatorname{sen}(k + 1) \theta = \operatorname{sen} k \theta \cos \theta + \operatorname{sen} \theta \cos k \theta,$$

$$\operatorname{sen} (k - 1) \theta = \operatorname{sen} k \theta \cos \theta - \operatorname{sen} \theta \cos k \theta,$$

tem-se:

$$\operatorname{sen}^2 (k + 1) \theta - p^2 \operatorname{sen} (k - 1) \theta = (1 - p^2) \operatorname{sen} k \theta \cos \theta + (1 + p^2) \operatorname{sen} \theta \cos k \theta$$

e, por conseguinte:

$$\rho_k = p^k \left[\frac{1 - p^2}{1 + p^2} \operatorname{sen} k \theta \cot \theta + \cos k \theta \right]$$

Escrevendo-se:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{1 + p^2}{1 - p^2} \operatorname{tg} \theta ,$$

resulta da relação anterior:

$$\rho_k = p^k \operatorname{sen} (k \theta + \psi)$$

Essa expressão vem mostrar que ρ_k oscilará com período $\frac{2\pi}{\theta}$ em tôrno do eixo horizontal e que sendo $p<1$, as oscilações serão amortecidas.

c) **Processo de médias móveis**

O processo de médias móveis (*) de ordem h, é definido pela relação:

$$X_t = a_0 Y_t + a_1 Y_{t-1} + \ldots + a_h Y_{t-h} ,$$

onde $\{ Y_t ; t = \ldots - 1, 0, + 1, \ldots \}$, chamado processo primário, é um processo aleatório puro de média "m" e variância σ^2

Da última igualdade resulta que a variância do processo é dada por:

$$D^2 (X_t) = (a_0^2 + a_1^2 + \ldots + a_h^2) \sigma^2$$

tendo em vista que as variáveis aleatórias $Y_t , Y_{t-1} , \ldots , Y_{t-h}$ não são correlacionadas.

Como o processo

$$\{Y_t ; t = \ldots - 1,0, + 1, \ldots\}$$

é aleatório puro, sem perda de generalidade, podemos supor $m = 0$, para determinar o correlograma do processo

$$\{X_t ; t = \ldots - 1,0, + 1, \ldots\}$$

Portanto:

$$\rho_k = \frac{a_k a_0 + \ldots + a_h a_{h-k}}{g}$$

$$\rho_k = 0, \quad \text{para} \quad k > h .$$

sendo:

$$g = a_0^2 + a_1^2 + \ldots a_h^2$$

Por conseguinte, o correlograma tem ordenadas iguais a zero, para $k>h$.

d) **Processo harmônico:**

Um processo estocástico

$$\{X_t ; t = \ldots - 1,0, + 1, \ldots\}$$

é **harmônico** quando as variáveis X_t são definidas por:

$$(21) \quad X_t = A_0 + \sum_{i=1}^{s} (A_i \cos t \theta_i + B_i \operatorname{sen} t \theta_i),$$

onde os A_i e B_i são variáveis aleatórias. O harmônico:

$$A_i \cos t \theta_i + B_i \operatorname{sen} t \theta_i ,$$

pode ser escrito:

$$A_i \cos t \theta_i + B_i \operatorname{sen} t \theta_i = C_i \cos (\theta_i t + \varphi_i); c_i = \sqrt{A_i^2 + B_i^2} \quad ; \operatorname{tg} \varphi = \frac{B_i}{A_i} ,$$

sendo C_i, sua amplitude; φ_i sua fase e $P_i = \frac{2\pi}{\theta_i}$ seu período.

(*) Veja Revista Brasiliera de Estatística ns. 87 e 88: Jessé Montello, *Sôbre a determinação dos Processos Estocásticos Primários.*

Pode-se demonstrar que o correlograma do processo é definido por:

$$(22) \quad \rho_m = a_0 + \sum_{i=1}^{s} (a_i \cos m \theta_i + b_i \operatorname{sen} m \theta_i),$$

onde os a_i e b_i são constantes.

Comparando-se as relações (21) e (22)

constata-se que o correlograma tem os mesmos períodos que o processo estocástico.

e) **Processo de periodicidades ocultas:**

O processo de periodicidades ocultas (hidden periodicities) resulta da superposição de um processo harmônico com um dos processos: aleatório puro, auto-regressivo ou de médias móveis.

MODÊLO DE SAMUELSON

Um modêlo bastante interessante na teoria dos ciclos é o de Samuelson que se baseia em uma combinação do **multiplicador** e do **acelerador.** Tratamos dêste modêlo dando inicialmente a sua formação estocástica. As suas equações estruturais que compreendem uma equação de definição e duas equações de comportamento (consumo e investimento), são:

$$(23) \qquad Y_t = C_t + I_t$$

$$(24) \qquad C_t = a\, Y_{t-1} + U'_t$$

$$(25) \qquad I_t = b\,(C_t - C_{t-1}) + I + U''_t$$

(princípio do acelerador), sendo I o investimento autônomo e U'_t e U''_t variáveis aleatórias pertencentes a dois processos estocásticos. As condições iniciais são:

$$Y_0 = R_0 \quad \text{e} \quad Y_1 = R_1$$

e o investimento autônomo I é a única variável exógena.

Substituindo a expressão de C_t, dada pela (24), na equação (25), obtem-se:

$$(26) \qquad I_t = ab\,(Y_{t-1} - Y_{t-2}) + b\,(U'_t - U'_{t-1}) + I + U''_t$$

Substituindo I_t dado pela (26), e C_t, dado pela (24), na equação (25), tem-se:

$$Y_t = a\, Y_{t-1} + ab\,(Y_{t-1} - Y_{t-2}) + I + b\,(U'_t - U''_t) + U''_t$$

ou:

$$Y_t - a\,(1 + b)\, Y_{t-1} + ab\, Y_{t-2} = I + b\,(U'_t - U''_t) + U''_t$$

Fazendo-se:

$$U_t = b\,(U'_t - U''_{t-1}) + U''_t,$$

tem-se:

$$(27) \quad Y_t - a\,(1 + b)\, Y_{t-1} + ab\, Y_{t-2} = I + U_t$$

onde U_t é uma variável aleatória pertencente a um processo estocástico, que resulta de uma combinação linear, dos acima mencionados. Sôbre o processo

$$\{U_t;\ t = \ldots -1, 0, +1, \ldots\}$$

faremos a hipótese de que é aleatório puro de média zero e variância σ^2

Uma solução particular da equação homogênea:

$$Y_t - a\,(1 + b)\, Y_{t-1} + ab\, Y_{t-2} = I$$

é:

$$Y_t = Y \ (\text{constante})$$

De fato, tem-se:

$$(28) \qquad Y - a\,(1 + b)\, Y + ab = I$$

ou:

$$Y\,(1 - a) = I, \quad a < 1$$

Donde:

$$Y = \frac{I}{1 - a}$$

Subtraindo-se ordenadamente as equações (27) e (28), e fazendo-se:

$$Y_t - Y = y_t\,,$$

teremos:

$$(28') \quad y_t - a\,(1 + b)\, y_{t-1} + ab y_{t-2} = U_t\,,$$

por onde se vê que na hipótese de que U_t pertença a um processo aleatório puro, a variável y_t (ou Y_t) pertencerá a um processo auto-regressivo.

Consideremos a equação homogênea associada a (28'):

$$(29) \qquad y_t - a\,(1 + b)\, y_{t-1} + ab y_{t-2} = 0\,,$$

cuja equação característica é:

$$(30) \qquad Z^2 - a\,(1 + b)\, Z + ab = 0$$

Resolvendo esta equação, tem-se:

$$Z = \frac{a\,(1 + b) \pm \sqrt{a^2\,(1 + b)^2 - 4ab}}{2}$$

Podemos distinguir três casos:

I) As raízes são reais e desiguais:

$$a^2\,(1 + b)^2 - 4ab > 0$$

II) As raízes são reais e iguais:

$$a^2\,(1 + b)^2 - 4ab = 0$$

III) As raízes são complexas conjugadas:

$$a^2(1+b)^2 - 4ab < 0$$

Observando-se que $a > 0$ as condições anteriores podem ser substituídas, respectivamente, por:

$$\text{I) } a > \frac{4b}{(1+b)^2} \;;\; \text{II) } a = \frac{4b}{(1+b)^2} \;;\; \text{III) } a < \frac{4b}{(1+b)^2} .$$

No plano (a, b), as regiões definidas por essas relações podem ser fàcilmente construídas. De fato, estudemos inicialmente a variação de função:

$$(31) \qquad a = \frac{4b}{(1+b)^2} \;, \quad \text{para } b \geq 0$$

Para $b \geq 0$, essa expressão define uma função contínua, tal que:

$$b = 0 \;, \quad \text{acarreta} \quad a = 0$$

$$b \to \infty \;, \quad \text{acarreta} \quad a \to 0$$

A derivada da (30) é:

$$a' = \frac{4(1-b)}{(1+b)^3} \,,$$

que se anula para:

$$b = 1$$

Para $O \leq b < 1$, tem-se, então $a' > O$ ou seja, a função a (31) é crescente de b.

Para $b < 1$, tem-se: $a' < O$ e a função (31) é decrescente.

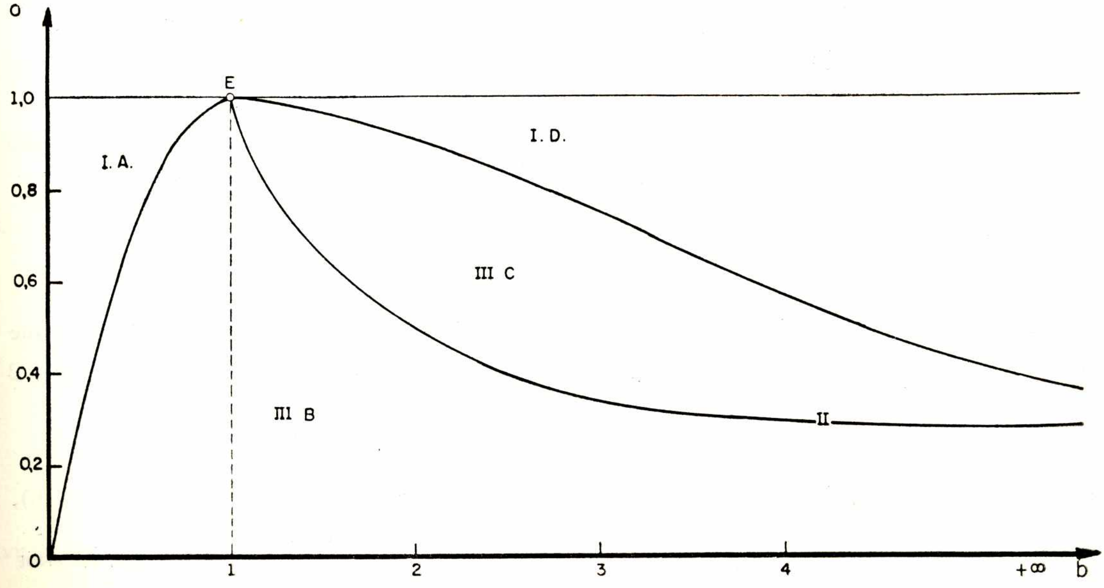
Portanto, para $b = 1$, a função definida pela (31) tem um máximo de valor:

$$a = 1$$

Êsses resultados podem ser condensados no seguinte quadro de variação da função (31):

b	o	↗	1	↗	2,0	↗	3,0	↗	+∞
a	o	↗	1 (max)	↘	0,9	↘	0,75	↘	+0
a'	+	+	0	–	–	–	–	–	–0

Podemos agora construir o gráfico de função (Fig. 1):



No que se refere à concavidade, verifica-se que:

$$a'' = \frac{8(b-2)}{(1+b)^4}$$

que se anula para $b = 0$. Quando $b < 2$, $a'' < 0$ e a curva é côncava para baixo e quando $b > 2$, $a'' > 0$ a curva é côncava para cima. O ponto de inflexão corresponde a $b = 2$.

Na Fig. 1, os pontos interiores da região I (I-A e I-D) correspondem às raízes reais e desiguais da equação (30); os pontos sôbre a curva II correspondem às raízes reais e iguais e aquêles interiores à região III (III-B e III-C) às raízes complexas.

A seguir discutiremos o comportamento das soluções da equação (29). Quando as raízes Z_1 e Z_2 da equação (30) são reais e desiguais, tem-se:

$$Y_t = C_1 Z_1^t + C_2 Z_2^t$$

É fácil ver que ambas as raízes Z_1 e Z_2 pertencem ao intervalo aberto (0,1), se $b < 1$. De fato, essas raízes são maiores do que zero, porque:

$$a(1+b) > \sqrt{a^2(1-b)^2 - 4ab}$$

Por outro lado, como $a < 1$ e $b < 1$, tem-se sucessivamente:

$$0 < 4 - 4a$$

$$-4ab < 4 - 4a - 4ab$$

$$-4ab < 4 - 4a(1+b)$$

$$(32) \quad a^2(1+b)^2 - 4ab < 4 - 4a(1+b) + a^2(1+b)^2$$

Por extração de raiz quadrada, considerando só o radical positivo, tem-se:

$$\sqrt{a^2(1+b)^2 - 4ab} < 2 - a(1+b),$$

observe-se que, em virtude das hipóteses, $2 - a(1+b) > 0$.

Logo:

$$\frac{a(1+b) + \sqrt{a^2(1+b)^2 - 4ab}}{2} < 1,$$

o que demonstra que as duas raízes são menores do que 1.

Vemos assim, que quando o ponto $(a, b) \in I$ e $a < 1$ e $b < 1$, isto é, na região I-A do gráfico, as raízes Z_1 e Z_2 pertencem ao intervalo (0,1). Portanto:

$$\lim_{t \to \infty} y_t = 0$$

Sempre que $(a, b) \in I - D$ isto é, se $b \geqslant 1$, tem-se:

$$\lim_{t \to \infty} y_t = \infty,$$

porque de (32) se obtem:

$$\sqrt{a^2(1+b)^2 - 2} < a(1+b) - 2,$$

e $a(1+b) - 2 \geqslant 0$. Para verificar esta última desigualdade, basta notar que se tem sucessivamente:

$$b \geq 1 \Longrightarrow b + b \geq 1 + b \text{ ou } 2b \geq 1 + b \Longrightarrow \frac{2b}{1+b} \geq 1$$

Como se tem em I-D:

$$a \geq \frac{4b}{(1+b)^2} = \frac{2}{1+b} \cdot \frac{2b}{1+b} \geq \frac{2}{1+b},$$

então:

$$a(1+b) \geqslant 2$$

Daí se segue que:

$$\frac{a(1+b) - \sqrt{a^2(1+b)^2 - 4ab}}{2} > 1 \text{ ou } Z_1 > 1$$

e, portanto:

$$\lim_{t \to \infty} y_t = 0$$

Quando as raízes da equação (30) são reais e ambas iguais a Z_1 tem-se:

$$y_t = (C_1 + C_2 t) Z_1^t,$$

onde $Z_1 = \dfrac{a(1+b)}{2}$

Se $b \leqslant 1$ e como $a < 1$, é imediato que $Z_1 < 1$, porque $a(1+b) < 1 + b \leq 2$

Logo, neste caso, tem-se:

$$(33) \quad \lim_{t \to \infty} y_t = 0$$

Por conseguinte, quando o ponto (a, b),

se desloca sôbre o trecho OE da curva II, então a (33) se verifica.

Quando $b > 1$, tem-se

$$a(1 + b) \geq 2 \text{ e } Z_1 \geq 1$$

Logo:

$$\lim_{t \to \infty} y_t = \infty$$

Consideremos agora o caso em que as raízes de (33) são números complexos conjugados. Neste caso, os pontos (a, b) pertencem à região III da Fig. 1, e as raízes de (30) são dadas por:

$$Z = c \pm id,$$

onde:

$$c = \frac{a(1+b)}{2} \text{ e } d = \frac{1}{2} \sqrt{4ab - a^2(1+b)^2}$$

O módulo de ambas as raízes é:

$$p = \sqrt{ab}$$

Escrevendo-se:

$$\cos\theta = \frac{a(1+b)}{2\sqrt{ab}} \text{ e } \operatorname{sen}\theta = \sqrt{1 - \frac{a^2(1+b)^2}{2}},$$

as raízes da equação (30) podem ser escritas na forma trigonométrica:

$$Z_1 = p(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta) = \sqrt{ab}(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$$

$$Z_2 = p(\cos\theta - i\operatorname{sen}\theta) = \sqrt{ab}(\cos\theta - i\operatorname{sen}\theta)$$

Por conseguinte, a solução geral da equação (29) é:

$$(34) \quad y_t = (ab)^{\frac{t}{2}} (A\cos\theta\, t + B\operatorname{sen}\theta\, t).$$

Para estudar o comportamento assintótico desta solução, devemos distinguir três casos:

i) $ab > 1$, ii) $ab = 1$ e iii) $ab < 1$

A curva de equação

$$ab = 1$$

representa uma hipérbole que decompõe a região III da figura nas duas seguintes III-B e III-C, nas quais se tem respectivamente $ab < 1$ e $ab > 1$.

Para os pontos da região III-B, tem-se em virtude de (34):

$$\lim_{t \to \infty} y_t = 0$$

Quando o ponto $(a, b) \in$ III. C, então,

$$\lim_{t \to \infty} y_t = \infty$$

Sempre que (a, b) está sôbre a curva da equação $ab = 1$, tem-se:

$$y_t = A\cos\theta\, t + B\operatorname{sen}\theta\, t$$

e y_t não tende para nenhum limite, mas oscilará em tôrno de zero.

Estudemos, agora, a solução geral da equação (28'). Uma solução particular se obtem escrevendo:

$$(34) \quad y_t = a_0 u_t + a_1 u_{t-1} + a_2 u_{t-2} + \ldots$$

onde os coeficientes $a_0, a_1, a_2, \ldots$ são determinados pelo sistema de equações lineares:

$$(35) \quad \begin{aligned} &a_0 = 1 \\ &a_1 - a(1+b) = 0 \\ &a_2 - a_1 a(1+b) + aba_2 = 0 \\ &a_k - a_{k-1} a(1+b) + aba_{k-2} = 0, \text{ para } k > 2. \end{aligned}$$

Observando-se que a última equação (35) tem também a equação característica (30), a sua solução geral será:

$$\text{(i)} \quad a_k = C_1 Z_1^k + C_2 Z_2^k, \text{ se } a > \frac{4b}{(1+b)^2}$$

$$\text{(ii)} \quad a_k = (C_1 + C_2 k) Z_1^k, \text{ se } a = \frac{4b}{(1+b)^2}$$

$$\text{(iii)} \quad a_k = (ab)^{\frac{k}{2}} (C_1 \cos\theta\, k + C_2 \operatorname{sen}\theta\, k), \text{ se } a < \frac{4b}{(1+b)^2}$$

sendo θ o argumento das raízes Z_1 e Z_2

As constantes C_1 e C_2 devem ser determinadas de modo que as duas primeiras condições (35) sejam satisfeitas.

No caso da solução (i), tem-se:

$$C_1 + C_2 = 1$$

$$C_1 Z_1 + C_2 Z_2 = a(1 + b)$$

Donde se obtem:

$$C_1 = \frac{Z_1}{Z_1 - Z_2}, \quad C_2 = \frac{Z_2}{Z_2 - Z_1}$$

e a solução particular procurada da última equação (35), será obtida fazendo-se:

$$a_k = \frac{Z_1^{k+1} - Z_2^{k+1}}{Z_1 - Z_2}$$

na série (34), desde que $a < 1$ e $b < 1$ porque, então, as raízes Z_1 e Z_2 pertencem ao intervalo aberto (0,1).

Para a solução ii) tem-se de modo análogo:

$$C_1 = 1$$

$$(C_1 + C_2) Z_1 = a(1 + b)$$

donde se obtém:

$$C_1 = 1, \quad C_2 = \frac{Z_2}{Z_1}$$

e, portanto:

$$a_0 = 1$$

$$a_k = a(1 + b) Z_1^{k-1}, \ldots, \quad k = 0,1,2, \ldots$$

Substituindo-se êsses valores na série (34), obtem-se a solução particular procurada, desde que $b \leqslant 1$ e $a < 1$.

Para a solução ii), tem-se:

$$C_1 = 1$$

$$(ab)^{\frac{1}{2}} (C_1 \cos\theta + C_2 \operatorname{sen}\theta) = a(1 + b)$$

Donde:

$$C_1 = 1$$

$$C_2 = \cot\theta$$

A solução particular se obtem, então, fazendo na (34):

$$a_k = \frac{\operatorname{sen}(k+1)\theta}{\operatorname{sen}\theta},$$

desde que $ab < 1$.

Observando-se que:

$$Y_t - Y = y_t, \quad \text{sendo} \quad Y = \frac{I}{1 - a},$$

tem-se que a solução da equação (27) pode assumir os seguintes aspectos:

$$\text{i)} \quad Y_t = \frac{I}{1 - a} + C_1 Z_1^t + C_2 Z_2^t + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{Z_1^{k+1} - Z_2^{k+1}}{Z_1 - Z_2} U_{t-k}$$

quando o ponto (a, b) pertence à região I. A. da Fig. 1. Nessa região a solução de regime será:

$$Y_t = \frac{I}{1 - a} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{Z_1^{k+1} - Z_2^{k+1}}{Z_1 - Z_2} U_{t-k},$$

o último têrmo indicando a repercussão das componentes aleatórias do modêlo sôbre o valor limite $\frac{I}{1 - a}$.

$$\text{ii)} \quad Y_t = \frac{I}{1 - a} + (C_1 + C_2 t) Z_1^k + a(1 + b) \left[U_t + \sum_{k=1}^{\infty} Z_1^{k-1} U_{t-k} \right],$$

quando o ponto (a, b) se desloca sôbre o trecho OE de curva II. A solução de regime será:

$$Y_t = \frac{I}{1 - a} + a(1 + b) \left(U_t + \sum_{k=1}^{\infty} Z_1^{k-1} U_{t-k} \right)$$

$$\text{iii)} \quad Y_t = \frac{I}{1 - a} + (ab)^t (C_1 \cos\theta t + C_2 \operatorname{sen}\theta t) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(k+1)\theta}{\operatorname{sen}\theta} U_{t-k},$$

quando o ponto (a, b) pertence à região III-B. A solução de regime será, então:

$$Y_t = \frac{I}{1-a} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\text{sen}\,(k+1)\,\theta}{\text{sen}\,\theta} U_{t-k}$$

Para as outras regiões, a renda tende para infinito ou não tende para nenhum limite.

Finalizando êste estudo sôbre o modêlo de Samuelson, determinaremos o correlograma do processo estocástico definido pela equação (27). Pelo que vimos anteriormente, concluimos que êsse correlograma se obtem como solução da equação de diferenças finitas:

$$\rho_m - a\,(1+b)\,\rho_{m-1} + ab\,\rho_{m-2} = 0$$

A solução desta equação será:

i) $\rho_m = C_1 Z_1^m + C_2 Z_2^m$, se $a > \dfrac{4b}{(1+b)^2}$

ii) $\rho_m = (C_1 + C_2 m)\, Z_1^m$, se $a = \dfrac{4b}{(1+b)^2}$

iii) $\rho_m = (ab)^{\frac{m}{2}} (C_1 \cos\theta\, m + C_2\, \text{sen}\,\theta\, m)$, se $a < \dfrac{4b}{(1+b)^2}$.

desde que as raízes da equação característica (30) sejam pontos interiores do círculo unidade $/ Z / \leqslant 1$.

As constantes C_1 e C_2 serão determinadas pelas seguintes condições iniciais:

$$\rho_0 = 1$$

$$\rho_1 - a\,(1+b) + ab\,\rho_1 = 0$$

ou:

$$\rho_0 = 1 \quad \text{e} \quad \rho_1 = \frac{a\,(1+b)}{1+ab}$$

As relações acima permitem concluir que, quando:

i) o ponto (a, b) pertence à região I-A, ou se desloca sôbre o trecho OE da curva II, os coeficientes de autocorrelação do processo tendem para zero;

ii) o ponto (a, b) pertence à região III-B, os coeficientes de autocorrelação tendem a zero, oscilando em tôrno dêsse valor.

Pelo que vimos acima, considerando os modelos estocásticos podemos analisar a repercussão do conjunto das variáveis aleatórias sôbre as variáveis endógenas.

BIBLIOGRAFIA

— E. Malinvaud — Méthodes Statistiques de l'Économétrie, Dunod Éditeur, Paris — 1963;

— Heinz Stowe — Econometria y Teoria Macroeconomica — Aguilar — Madrid — 1962:

— Gerhard Tintner — Econometrics — John Wiley & Sons, Inc , New York — 1954;

— Herman Wold and Lars Juréen — Demand Analysis — John Wiley & Sons, Inc., New York — 1953;

— J. Johnston — Econometrics Methods — Mc Graw — Hill Book Co., Inc., New York — 1963;

— E. F. Beach — Modelos Economicos — Aguilar — Madrid — 1961;

— Arthur S. Goldberg — Econometric Theory — John Wiley & Sons, Inc., New York — 1964;

— Lawrence R. Klein — A textbook on Econometrics — Evaston: Row, Peterson, 1953;

— Luiz de Freitas Bueno — Estimação de Modelos Econômicos Lineares — São Paulo — 1959.

SUMMARY

The paper concerns to econometric theory as a tool to economic planning. In the first place, the author defines econometric model, showing its use to study the econometric and statistical problems in model construction.

After classifying and exemplifying fundamental variables belonging to a model, the authour examines several kinds of models: deterministic and stochastical models, statical and dynamic models, interdependent and recursive models.

The author proceeds studying the use of stochastical process in econometric models, as well as the principal kinds of stationary process: random process, process of autoregression, process of moving averages, harmonic process and process of hidden periodicities.

Conncluding the paper, the author analyzes Samuelson's Model and its aplication in econometric studies.

RÉSUMÉ

Ce travail met en relief le rôle de l'économétrie en tant qu'instrument de la planification économique. L'auteur souligne, d'abord, le concept de modèle économétrique et annote l'emploi de celui-ci à l'étude des phénomènes économiques, ainsi que les problèmes statistiques qui se présentent lors de l'élaboration d'un modèle.

L'auteur classifie les variables renfermées dans un modèle, en donne des exemples et examine ensuite les différents types de modèles: déterminatifs et aleatoires, statiques et dynamiques, interdépendants et recoursifs.

L'auteur étudie ensuite, en détail, l'emploi des processus aleatoires dans les modèles économétriques tout en analysant les fonctions valeur moyenne et covariance d'un processus aleatoire ainsi que le processus aleatoire stationnaire et les différents types généraux de processus stationnaires: processus aléatoire pur; processus autoregressif; processus de moyennes mobiles; processus harmonique et processus à périodicités cachées (hidden periodicities).

L'auteur termine en se penchant sur l'analyse du modèle de Samuelson et son application aux études économétriques.