

**FUNDAÇÃO GETULIO VARGAS**  
**Escola de Pós-Graduação em Economia**  
**Mestrado em Finanças e Economia Empresarial**

**Lucas Figueiredo Terra de Faria**

**ANÁLISE DA EVOLUÇÃO DOS FATORES DE NÍVEL, INCLINAÇÃO E  
CURVATURA DA INFLAÇÃO IMPLÍCITA NO MERCADO BRASILEIRO**

**Rio de Janeiro**

**2021**

**LUCAS FIGUEIREDO TERRA DE FARIA**

**ANÁLISE DA EVOLUÇÃO DOS FATORES DE NÍVEL, INCLINAÇÃO E  
CURVATURA DA INFLAÇÃO IMPLÍCITA NO MERCADO BRASILEIRO**

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em  
Economia Empresarial e Finanças da Escola de Pós-Graduação em  
Economia para obtenção do grau de Mestre (a) em Economia  
Empresarial e Finanças.

Área de Concentração: Finanças

Orientadora: Daniela Kubudi Glasman

Rio de Janeiro

2021

Faria, Lucas Figueiredo Terra de

Análise da evolução dos fatores de nível, inclinação e curvatura da inflação implícita no mercado brasileiro / Lucas Figueiredo Terra de Faria. – 2021.  
57 f.

Dissertação (mestrado) - Fundação Getulio Vargas, Escola Brasileira de Economia e Finanças.

Orientador: Daniela Kubudi.

Inclui bibliografia.

1. Inflação - Modelos matemáticos. 2. Macroeconomia - Modelos matemáticos.  
3. Passeio aleatório (Matemática). 4. Brasil - Política econômica. I. Glasman,  
Daniela Kubudi. II. Fundação Getulio Vargas. Escola Brasileira de Economia e  
Finanças. III. Título.

CDD – 332.41

LUCAS FIGUEIREDO TERRA DE FARIA

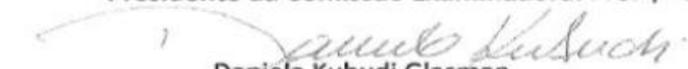
**"ANÁLISE DA EVOLUÇÃO DOS FATORES DE NÍVEL, INCLINAÇÃO E CURVATURA DA INFLAÇÃO IMPLÍCITA NO MERCADO BRASILEIRO"**

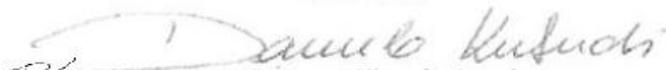
Dissertação apresentado(a) ao Curso de Mestrado em Economia do(a) EPGE Escola Brasileira de Economia e Finanças - FGV EPGE para obtenção do grau de Mestre(a) em Economia Empresarial e Finanças.

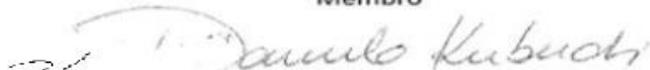
Data da defesa: 31/03/2021

**ASSINATURA DOS MEMBROS DA BANCA EXAMINADORA**

**Presidente da Comissão Examinadora: Prof<sup>o</sup>/a Daniela Kubudi Glasman**

  
Daniela Kubudi Glasman  
Orientador

  
Gustavo Silva de Araujo  
Membro

  
Caio Augusto Conalgo Teles  
Membro

Nos termos da Lei nº 13.979 de 06/02/20 - DOU nº 27 de 07/02/20 e Portaria MEC nº 544 de 16/06/20 - DOU nº 114 de 17/06/20 que dispõem sobre a suspensão temporária das atividades acadêmicas presenciais e a utilização de recursos tecnológicos face ao COVID-19, as apresentações das defesas de Tese e Dissertação, de forma excepcional, serão realizadas de forma remota e síncrona, incluindo-se nessa modalidade membros da banca e discente.



Ricardo de Oliveira Cavalcanti  
Coordenador



Antonio de Araujo Freitas Junior  
Pró-Reitor de Ensino, Pesquisa e Pós-Graduação FGV

Antonio Freitas, PhD  
Pró-Reitor de Ensino, Pesquisa e Pós-Graduação  
Fundação Getúlio Vargas

**Instrução Normativa nº 01/19, de 09/07/19 - Pró-Reitoria FGV**

Em caso de participação de Membro(s) da Banca Examinadora de forma não-presencial\*, o Presidente da Comissão Examinadora assinará o documento como representante legal, delegado por esta I.N.

\*Skype, Videoconferência, Apps de vídeo etc

## **AGRADECIMENTOS**

À minha orientadora, Dra. Daniela Kubudi, que me acompanhou durante todo o processo de confecção desse trabalho dando todo auxílio necessário com sua ampla experiência e profundo conhecimento para a elaboração dessa dissertação.

Aos meus pais, Cynthia e Luiz Paulo Terra de Faria, e minha irmã, Dra. Larissa Terra de Faria, que sempre me incentivaram ao longo da minha vida para me dedicar aos estudos.

À minha esposa, Maria Carolina Rodriguez, por todo o apoio, paciência e compreensão ao longo da construção dessa dissertação.

## RESUMO

Este trabalho tem como objetivo estudar a estrutura a termo da inflação implícita, seu comportamento ao longo do tempo e comparar suas taxas frente às expectativas de inflação do Relatório Focus. Além disso, foram feitas regressões lineares para se avaliar se os fatores de nível, inclinação e curvatura que definem a inflação implícita guardam relação com variáveis macroeconômicas e financeiras. Também é averiguado se o modelo estimado possui uma capacidade de projeção mais eficaz que um passeio aleatório. A análise mostra que a inflação implícita apresentava uma forma com pequenas alterações até um choque em 2014 que prosseguiu em 2015 estabilizando a partir de 2016. A comparação com o Relatório Focus comprovou uma forte relação que vai ao encontro da literatura a respeito do tema no mercado brasileiro. As regressões lineares concluíram que havia relações estatisticamente significativas entre as variáveis independentes e o nível, inclinação e curvatura da inflação implícita. O exame entre o modelo obtido a partir das regressões lineares e do passeio aleatório mostra que o primeiro aparenta ser consistentemente mais eficaz, o que é confirmado pelo teste de Diebold e Mariano (1995).

Palavras-chave: Inflação Implícita; Estrutura a Termo; Relatório Focus; Variáveis Macroeconômicas; Passeio Aleatório

## ABSTRACT

This paper aims to study the implied inflation term structure, its behaviour over time and compare its rates with the expectations for inflation on the Focus Report. Also, linear regressions were applied to evaluate if the factors of level, slope and curvature that define the implied inflation maintain a relationship with financial and macroeconomic variables. Furthermore, an investigation is conducted to ascertain if the resulting model has a more accurate projection capability than a random walk. The analysis shows that the implied inflation had a stable form with few alterations until a shock in 2014 that continued throughout 2015 stabilizing again in 2016. The comparison with the Focus Report presented a strong relation what is in agreement with the literature to this respect in the Brazilian market. The linear regression concluded that there were statistically significant relations between the independent variables and the level, slope and curvature of the implied inflation. The review between the model obtained through the linear regressions and the random walk show that the first appears to be consistently more accurate which is confirmed through a Diebold and Mariano (1995) test.

Keyword: Implied Inflation; Term Structure; Focus Report; Macroeconomic Variables; Random Walk

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Carregamento dos betas .....	18
Figura 2 – Composição em janeiro de 2005 .....	19
Figura 3 – Composição em junho de 2020 .....	19
Figura 4 – Volume Negociado em Bilhões de R\$ .....	20
Figura 5 – Evolução de $\hat{\beta}_{1t}$ .....	37
Figura 6 – Evolução de $\hat{\beta}_{2t}$ .....	38
Figura 7 – Evolução de $\hat{\beta}_{3t}$ .....	38
Figura 8 – Evolução de $\hat{\beta}_{4t}$ .....	39
Figura 9 – Comparação $\hat{\beta}_{1t}$ com <i>proxy</i> de Nível da BEIR .....	40
Figura 10 – Comparação $\hat{\beta}_{2t}$ com <i>proxy</i> de Inclinação da BEIR .....	41
Figura 11 – Comparação do Vértice de 1 ano da BEIR com Relatório Focus .....	42
Figura 12 – Regressão Linear para $\hat{\beta}_{1t}$ .....	43
Figura 13 – Regressão Linear para $\hat{\beta}_{2t}$ .....	44
Figura 14 – Regressão Linear para $\hat{\beta}_{3t}$ .....	45
Figura 15 – Regressão Linear para $\hat{\beta}_{4t}$ .....	46
Figura 16 – Valores de $REQM_{projec\tilde{a}o}^i$ , $REQM_{projec\tilde{a}o\text{ocp}}^i$ e $REQM_{projec\tilde{a}o\text{olp}}^i$ .....	48
Figura 17 – Curvas para data do $REQM_{projec\tilde{a}o}^{27}$ .....	49
Figura 18 – Curvas para data do $REQM_{projec\tilde{a}o}^{189}$ .....	49
Figura 19 – Valores de $REQM_{projec\tilde{a}o}^i$ e $REQM_{RW}^i$ .....	50

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Estatística Descritiva dos Fatores da Estrutura a Termo das Taxas de Juros Nominal .....	21
Tabela 2 – Estatística Descritiva dos Fatores da Estrutura a Termo das Taxas de Juros Real.	22
Tabela 3 – Estatísticas Descritivas dos Vértices da BEIR.....	23
Tabela 4 – Estatísticas Descritivas da Série de Variação de 12 Meses do IPCA Suavizada....	25
Tabela 5 – Estatística Descritiva das Variáveis Financeiras e Macroeconômicas .....	26
Tabela 6 – Regressões .....	30
Tabela 7 – Valores de $\lambda_1$ e $\lambda_2$ médios e seu REQM.....	35
Tabela 8 – Estatísticas Descritivas dos Betas para os Lambdas Médios.....	35
Tabela 9 – Valores de $\lambda_1$ e $\lambda_2$ ótimos e seu REQM .....	36
Tabela 10 – Estatísticas Descritivas dos Betas para os Lambdas Ótimos.....	36
Tabela 11 – Valores de $\lambda_{1,2015}$ e $\lambda_{2,2015}$ ótimos e seu REQM .....	46
Tabela 12 – Estatísticas Descritivas dos Betas para os Lambdas Ótimos com dados até 201547	
Tabela 13 – Resultados do Teste Diebold e Mariano (1995) .....	51

## SUMÁRIO

1. Introdução	9
2. Referencial Teórico	16
3. Descrição dos Dados	21
3.1 ANBIMA	21
3.2 Relatório Focus	24
3.3 Bloomberg	25
4. Metodologia	27
4.1 Estimação do Modelo de Svensson (1994)	27
4.2 Otimização dos Lambdas	29
4.3 Regressões Lineares	29
4.4 Projeção Out-of-Sample	31
4.5 Passeio Aleatório	33
5. Resultados	35
5.1 Lambdas e Betas Médios	35
5.2 Lambdas e Betas Ótimos	36
5.3 Evolução dos Betas na Amostra	37
5.4 BEIR x Relatório Focus	41
5.5 Regressões Lineares	42
5.6 Projeção Out-of-Sample	46
5.7 Maior $REQM_{projecção}^i$ x Menor $REQM_{projecção}^i$	48
5.8 Passeio Aleatório e Teste de Diebold e Mariano (1995)	50
6. Conclusão	53
Referências Bibliográficas	56

## 1. Introdução

O Banco Central do Brasil (BACEN) começou, em 1999, a seguir um regime de metas de inflação, no qual é feito um anúncio de uma meta nominal para a inflação em um prazo específico com limites inferior e superior, dentro dos quais o BACEN se compromete a manter a taxa de inflação. Deste modo, as expectativas de inflação se tornaram uma ferramenta relevante para analisar se a política monetária aplicada está tendo sucesso em atingir a meta.

O ex-presidente do *Federal Reserve System* (FED), Ben Bernanke, fez um discurso em 2004 no qual elencou três motivos pelos quais os bancos centrais têm interesse nas expectativas de inflação dos participantes do mercado financeiro.

Primeiro, a estabilidade de preços é um objetivo chave para a política monetária, o *Federal Reserve* gasta recursos substanciais para projetar inflação. Na medida que mercados financeiros servem para agregar informações do setor privado sobre o provável curso futuro da inflação, dados sobre preços de ativos e *yields* podem ser usados para validar e até melhorar as projeções do FED. Segundo, expectativas de inflação são de interesse para legisladores independentemente da inflação em si. Uma literatura considerável sugere que políticas monetárias de sucesso deveriam estabilizar, ou “ancorar”, expectativas de inflação de modo a prevenir estas de se tornarem uma fonte de instabilidade por si só (Goodfriend, 1993; Evans e Honkapohja, 2003). Finalmente, conhecimento das expectativas de inflação em mercados financeiros permite o cálculo da taxa de juros real, que é um indicador importante tanto da condição da economia como do estado da política monetária.  
<sup>1</sup>(Bernanke, 2004, tradução nossa)

Em um discurso posterior, em 2007, Ben Bernanke salientou que o tratamento dado pelos funcionários do FED às expectativas da inflação em suas projeções, além de considerar medidas de inflação contidas nas diferenças entre os *yields* dos títulos nominais e indexados à

---

<sup>1</sup> First, as price stability is a key objective of monetary policy, the Federal Reserve puts substantial resources into forecasting inflation. To the extent that financial markets serve to aggregate private-sector information about the likely future course of inflation, data on asset prices and yields might be used to validate and perhaps improve the Fed's forecasts. Second, inflation expectations are of interest to policymakers independent of inflation itself. A considerable literature suggests that successful monetary policies should stabilize, or "anchor," inflation expectations so as to prevent them from becoming a source of instability in their own right (Goodfriend, 1993; Evans and Honkapohja, 2003). Finally, knowledge of the expectations of inflation in financial markets permits the calculation of real interest rates, which are important indicators of both the condition of the economy and the stance of monetary policy.

inflação emitidas pelo tesouro americano (*Treasury*), também avalia várias medidas de expectativas de inflação contidas em pesquisas conduzidas com economistas e consumidores.

Os dois instrumentos mencionados por Bernanke também são usados pelo BACEN para medir as expectativas de inflação no mercado brasileiro. O Relatório Focus é uma pesquisa divulgada semanalmente pelo BACEN sobre as expectativas macroeconômicas de mais de 100 agentes de mercado, em especial instituições financeiras e consultorias, que inclui a expectativa declarada dos pesquisados a respeito da inflação para determinados prazos, enquanto as expectativas de inflação dos participantes do mercado financeiro estão contidas no que é conhecido como *break-even inflation rate* (BEIR), inflação implícita ou inflação de compensação. Sendo a BEIR obtida a partir da diferença entre as estruturas a termo construídas a partir das taxas dos títulos nominais Tesouro Prefixado e Tesouro Prefixado com Juros Semestrais<sup>2</sup> e dos títulos indexados à inflação Tesouro IPCA + e Tesouro IPCA + com Juros Semestrais<sup>3</sup> que são emitidos pelo Governo Federal.

Importante ressaltar que apesar de a expectativa da variação futura de preços estar contida na BEIR, ela não define a inflação implícita completamente. Por exemplo, Vicente e Graminho (2015) propõem um modelo onde a BEIR apresenta os seguintes componentes: expectativa de inflação, prêmio de risco de inflação dado que a inflação implícita é construída a partir de títulos indexados à inflação e títulos prefixados, prêmio de risco de liquidez devido a diferença de liquidez entre os títulos usados na construção das estruturas a termo das taxas de juros e convexidade uma vez que a relação entre preços e taxas de títulos provém de uma função convexa.

Salienta-se também que a construção da BEIR demanda a aplicação de um modelo para descrever os movimentos das estruturas a termo das taxas de juros nominal e real. Entre as opções de modelagem possíveis destacam-se duas comumente utilizadas na literatura e no mercado financeiro: Nelson e Siegel (1987) e Svensson (1994). Os modelos propostos por esses autores se baseiam no trabalho de Litterman e Scheinkman (1991) que ao investigarem os fatores comuns que afetavam os retornos de ativos governamentais no mercado americano concluíram que a maior parte da variância dos retornos desses ativos pode ser explicada por

---

<sup>2</sup> Anteriormente conhecidos como Letras do Tesouro Nacional (LTN) e Notas do Tesouro Nacional série F (NTN-F), respectivamente.

<sup>3</sup> Anteriormente conhecidos como Notas do Tesouro Nacional série B (NTN-B) e Nota do Tesouro Nacional série B Principal (NTN-B Principal), respectivamente.

três “fatores” ou atributos da estrutura a termo das taxas de juros que eles denominaram de nível, inclinação e curvatura.

O aumento da liquidez do mercado secundário brasileiro dos títulos governamentais indexados à inflação permitiu o desenvolvimento de uma literatura científica a respeito do tema da inflação implícita no mercado nacional, enquanto pesquisas e trabalhos desta natureza já existem a mais tempo para mercados internacionais mais maduros.

Diebold e Li (2006) estimam a estrutura a termo das taxas de juros americana usando modificações do modelo proposto por Nelson e Siegel (1987) onde os três parâmetros progridem dinamicamente. Demonstram, também, que esses parâmetros podem ser interpretados como fatores correspondentes ao nível, inclinação e curvatura e que sua estimação pode ser feita com grande eficiência. Adicionalmente, propõem e implementam modelos autorregressivos para os fatores e, então, aplicam esses na projeção de estruturas a termo das taxas de juros para variados horizontes de tempo encontrando que a acurácia da projeção é maior para horizontes longos do que projeções feitas por alguns modelos dados como *benchmark*.

Barbedo, Maia e Val (2010) extraem as BEIRs no mercado brasileiro aplicando, também, uma metodologia de estimação do prêmio de risco de inflação e comparam a previsão dessas frente à expectativa de inflação do relatório Focus. Os resultados mostram que, independentemente de um ajuste relativo ao prêmio de risco de inflação, as expectativas presentes no Relatório Focus apresentavam maiores erros de previsão em relação àqueles obtidos das BEIRs.

Huse (2011) propõe e estima uma variação do modelo de Nelson e Siegel (1987) onde os três parâmetros têm seus movimentos ditados por variáveis de estado. Conclui-se que mesmo um modelo extremamente simplificado onde cada um dos fatores, isto é, nível, inclinação e curvatura, são determinados apenas por, respectivamente, inflação, política monetária e atividade econômica tem capacidade preditiva superior a um modelo de *benchmark*.

Rochman e Hatisuka (2011) utilizam o modelo proposto por Svensson (1994) para construir estruturas a termo das taxas de juros para a inflação implícita com o intuito de analisar se existe ancoragem das expectativas de inflação de longo prazo no mercado brasileiro. Além disso, selecionaram variações de indicadores macroeconômicos pertinentes para a inflação de curto prazo e testaram se alguns vértices da inflação implícita apresentavam sensibilidade a

eles. Concluíram que existia ancoragem das expectativas de inflação no mercado brasileiro, entretanto, ao redor do valor de 6% ao ano, superando a meta de 4,5% ao ano para o período da amostra.

Soderlind (2011) observa a evolução da BEIR dos Estados Unidos de 1997 a meados de 2008 para analisar seus movimentos em relação a alterações no prêmio de risco de inflação, prêmio de liquidez e expectativa de inflação. Os resultados concluem que a incerteza da inflação obtida a partir de pesquisas e aproximações para o prêmio de liquidez são relevantes para explicar a BEIR.

Weber (2011) comparou a acurácia de previsões da inflação obtidas no Relatório Focus com a BEIR oriunda das taxas indicativas de títulos públicos disponíveis na ANBIMA. O trabalho conclui que as inflações implícitas têm maior poder preditivo para os horizontes mais longos analisados, isto é, de 9 a 30 meses, ao passo que as expectativas presentes no Relatório Focus apresentavam melhores resultados para horizontes curtos como de 3 e 6 meses.

Caldeira e Furlani (2013) estimaram, para o mercado brasileiro, a BEIR a partir de títulos de renda fixa e, então, compararam essa inflação implícita estimada com os modelos de VAR utilizados pelo BACEN e as estimativas dos Top5 obtidas do Relatórios Focus. Concluíram que as BEIRs demonstraram uma maior capacidade de previsão em relação aos modelos VAR, entretanto, inferior ao dos Top5 do Relatórios Focus.

Vicente e Guillen (2013) utilizaram uma abordagem sem modelo de modo a analisar o relacionamento entre a BEIR e a inflação futura. Os resultados mostraram que essa relação variava muito de acordo com os vértices, sendo a BEIR um estimador não viesado apenas para horizontes de 3 e 6 meses, não tendo capacidade explicativa significativa a respeito dos vértices médios, de 12 e 18 meses, e, por fim, tendo uma relação negativa com a inflação futura para os horizontes mais longos de 24 e 30 meses.

Vicente e Graminho (2015) apresentaram um modelo para decompor a BEIR em expectativa de inflação, termo de convexidade, prêmios de liquidez e prêmio de risco de inflação no mercado brasileiro. Concluíram que o termo de convexidade não é significativo, o prêmio de liquidez não possui relevância uma vez que, mesmo havendo diferença de liquidez entre os títulos nominais e reais, este não é remunerado pelo fato de os investidores de títulos reais carregarem esses ativos até o vencimento e o prêmio de risco de inflação é pequeno para horizontes curtos enquanto que, para horizontes longos, é variável no tempo. A partir de todos

os resultados apresentados indicaram que a expectativa de inflação é o principal componente da BEIR.

Fernandes e Thiele (2015) aplicaram o modelo de Huse (2011) com os três parâmetros interpretados como nível, inclinação e curvatura da estrutura a termo da inflação implícita variando ao longo do tempo em função de variáveis macroeconômicas, sendo estas: taxa de câmbio, inflação, índice de commodities e CDS. Concluem que as variáveis macroeconômicas afetam a BEIR de maneiras distintas, por exemplo, um choque de um desvio padrão na taxa de câmbio e na inflação aumentam mais o curto e o longo prazos da curva, enquanto o mesmo choque no índice de commodities aumenta a BEIR no curto prazo e o choque de um desvio padrão no CDS desloca paralelamente a BEIR para baixo.

Araújo e Vicente (2017) propõem uma metodologia para estimar a BEIR de curto prazo no mercado brasileiro que leva em consideração sua sazonalidade e a defasagem dos títulos indexados à inflação vis-à-vis os títulos prefixados e comparam os resultados do modelo com expectativas da inflação baseadas em pesquisas. Encontram que o modelo possui um poder preditivo semelhante ao do Relatório Focus, mas conta com a vantagem de a BEIR ser atualizada de forma permanente contra uma pesquisa que não tem como ser aplicada com a mesma frequência.

Doi, Fernandes e Nunes (2017) utilizaram dois modelos VAR para, respectivamente, analisar a relação entre o prêmio de inflação contido na BEIR e o aumento do desvio padrão das expectativas de inflação do Relatório Focus e como essa relação influenciaria os três fatores que definem a estrutura a termo do prêmio de inflação da BEIR. Encontraram que choques no desvio padrão das expectativas da inflação impactam de maneira relevante os prêmios de inflação da BEIR, entretanto, o aumento no desvio padrão influencia apenas o nível da estrutura a termo do prêmio de inflação da BEIR, não tendo efeito sobre inclinação e curvatura.

Kadobayashi (2018) empregou simulações de VAR para estabelecer relações entre determinadas variáveis macroeconômicas, a BEIR e seu prêmio de inflação. Encontrou que um impulso na taxa cambial e nos juros nominais altera a BEIR de forma positiva com influência maior no longo prazo do que no curto prazo, sendo que os juros nominais também tem essa influência sobre os prêmios de inflação, enquanto choques na taxa de juros prefixados tem a resposta oposta, isto é, negativa e mais expressivas nos horizontes curtos e, finalmente, choques no prêmio do CDS Brasil impactaram a BEIR negativamente de forma uniforme ao longo dos horizontes.

Val e Araújo (2019) propõe um método alternativo para estimar a BEIR usando apenas títulos governamentais e que trata sua sazonalidade e a defasagem dos títulos indexados à inflação vis-à-vis os títulos prefixados. Os resultados mostram que os ajustes no modelo para a defasagem de indexação e a sazonalidade são mais importantes para as expectativas de inflação de curto prazo, ao passo que no longo prazo as BEIRs com ou sem esses ajustes tendem a ter o mesmo erro de previsão. Além disso, os autores encontram que o modelo proposto tem poder preditivo estatisticamente igual ou melhor que expectativas de inflação obtidas de pesquisas.

O objetivo deste trabalho é estudar a estrutura a termo da BEIR, seu comportamento ao longo do tempo e comparar as taxas da BEIR frente às expectativas de inflação reportadas no Relatório Focus. Além disso, se analisará se os fatores de nível, inclinação e curvatura que definem a BEIR guardam relação com variáveis macroeconômicas e financeiras selecionadas.

A análise se dará através da elaboração de um histórico de estruturas a termo da inflação implícita a partir das estruturas a termo das taxas de juros nominal e real construídas com base nos preços indicativos dos títulos públicos federais divulgados pela Associação Brasileira das Entidades dos Mercados Financeiro e de Capitais (ANBIMA) por meio do modelo de Svensson (1994). Posteriormente, se utilizarão ferramentas econométricas para analisar se a taxa de câmbio do dólar, o *credit default swap* (CDS) do Brasil, o índice de *commodity* CRB, o índice de Bovespa, a variação do Índice de Preços ao Consumidor calculado pela Fundação Instituto de Pesquisas Econômicas (CPI) influenciam os fatores de nível, inclinação e curvatura da BEIR. Finalmente, será feita uma projeção *out-of-sample* a partir dos resultados da análise econométrica que, então, será comparada a um passeio aleatório para determinar se o modelo desenvolvido é capaz de fazer projeções mais precisas de forma estatisticamente significativa.

O presente trabalho se relaciona mais proximamente com o de Fernandes e Thiele (2015) ao examinar o comportamento dos fatores correspondentes a nível, inclinação e curvaturas da estrutura a termo da inflação implícita em relação a variáveis macroeconômicas. O modelo de fatores dinâmicos de Huse (2011), usado pelos autores, propõe a otimização do modelo de Nelson e Siegel (1987) em conjunto com as regressões lineares dos fatores em relação às variáveis macroeconômicas. Enquanto nesta dissertação se utiliza o modelo de Svensson (1994), com 4 fatores, e a estimação desses e sua regressão em variáveis selecionadas ocorre em dois passos distintos, além de haver uma otimização dos lambdas utilizados na estimação do modelo. Adicionalmente, Fernandes e Thiele concluem seu trabalho dando choques de um desvio padrão nas variáveis macroeconômicas e analisando as variações desencadeadas nas estruturas a termo de taxa de juros, já neste trabalho são feitas projeções *out-*

*of-sample* das taxas para diferentes horizontes de tempo e estas são comparadas a um passeio aleatório para averiguar a capacidade de previsão do modelo estimado.

O restante dessa tese é apresentado da seguinte forma: a seção 2 apresenta o referencial teórico sobre o qual se baseia esta dissertação, a seção 3 apresenta e detalha os dados que serão utilizados na análise, a seção 4 descreve a metodologia aplicada, a seção 5 documenta e discute os resultados obtidos e, finalmente, a seção 6 oferece as principais conclusões deste trabalho.

## 2. Referencial Teórico

A ANBIMA é uma associação de instituições do mercado financeiro como bancos, gestoras, corretoras, distribuidoras e administradoras que presta uma série de serviços entre eles a divulgação diária de preços e taxas de títulos públicos federais. A partir das taxas dos Tesouros Prefixados e Tesouros Prefixados com Juros Semestrais, e dos Tesouros IPCA + e Tesouro IPCA + com Juros Semestrais, que são títulos indexados ao IPCA, a ANBIMA constrói e divulga estruturas a termo das taxas de juros nominal e real. Essas curvas são utilizadas pelos associados e outros agentes do mercado financeiro para projeções de fluxos e marcação a mercado de vários ativos.

Para construir a estrutura a termo das taxas de juros, a ANBIMA utiliza o modelo proposto por Svensson (1994) que é um modelo paramétrico com funções representando os fatores de nível, inclinação e curvatura da estrutura a termo das taxas de juros adaptando os conceitos estabelecidos por Litterman e Scheinkman (1991), conforme já apresentado na seção 1. Este modelo é uma extensão do modelo de Nelson e Siegel (1987) ao acrescentar um quarto termo para representar uma segunda curvatura, que não estava prevista no modelo original, de modo a aumentar a flexibilidade do modelo melhorando o ajuste aos dados observados no mercado.

A função da estrutura a termo de taxas zero cupom de Svensson (1994) propõe que a taxa de juros na data  $t$  para o prazo  $\tau$  segue a equação abaixo.

$$r_t(\tau) = \beta_{1t} + \beta_{2t} \left( \frac{1 - e^{-\lambda_{1t}\tau}}{\lambda_{1t}\tau} \right) + \beta_{3t} \left( \frac{1 - e^{-\lambda_{1t}\tau}}{\lambda_{1t}\tau} - e^{-\lambda_{1t}\tau} \right) + \beta_{4t} \left( \frac{1 - e^{-\lambda_{2t}\tau}}{\lambda_{2t}\tau} - e^{-\lambda_{2t}\tau} \right) \quad (1)$$

Onde,

$r_t(\tau)$  é a taxa de juros na data  $t$  para o prazo  $\tau$ , em anos (base dias úteis/252);

$\beta_{1t}$  possui a interpretação do nível (ou longo prazo) da estrutura a termo das taxas de juros;

$\beta_{2t}$  possui a interpretação da inclinação (ou curto prazo) da estrutura a termo das taxas de juros;

$\beta_{3t}$  e  $\beta_{4t}$  possuem a interpretação das curvaturas (ou médio prazo) da estrutura a termo das taxas de juros;

$\lambda_{1t}$  caracteriza o decaimento determinando onde a carga de  $\beta_{3t}$  atinge seu máximo;

$\lambda_{2t}$  caracteriza o decaimento determinando onde a carga de  $\beta_{4t}$  atinge seu máximo;

Deste modo, é possível observar que o modelo de Svensson permite a captura dos movimentos mais relevantes da estrutura a termo das taxas de juros. Além disso, conforme a ANBIMA explica em seu manual de metodologia, é uma equação relativamente simples que delinea a estrutura a termo das taxas de juros a partir de um limitado número de parâmetros e que desenvolve uma forma suave e flexível que pode se adequar a variadas configurações de curvas a serem extraídas dos dados<sup>4</sup>. Tendo em vista essas características diversos bancos centrais pelo mundo, inclusive o brasileiro, optaram por utilizar esse modelo.

As interpretações atribuídas a cada um dos betas provêm dos valores que seus carregamentos assumem em relação as maturidades  $\tau$ . O carregamento de  $\beta_{1t}$  é constante e igual a 1, logo afeta todas as maturidades de maneira igual e, assim, representa o nível, ou longo prazo, da curva. Enquanto que o carregamento de  $\beta_{2t}$  começa com valor de 1 e vai decaindo com o crescimento de  $\tau$  até chegar a zero, por isso afeta proporcionalmente mais as maturidades de curto prazo em relação as de longo prazo caracterizando um fator de inclinação. Finalmente, os carregamentos de  $\beta_{3t}$  e  $\beta_{4t}$  começam com valor igual a zero e vão aumentando com o crescimento de  $\tau$  até atingirem seu máximo em um ponto que é definido, respectivamente, por  $\lambda_{1t}$  e  $\lambda_{2t}$ , e, então, começam a decair até zero e, portanto, possuem impacto pequenos nos curto e longo prazos refletindo as curvaturas, ou médio prazo, da curva. A Figura 1 demonstra graficamente os carregamentos dos betas em relação as maturidades para ilustrar os efeitos descritos<sup>5</sup>.

---

<sup>4</sup> Para maiores informações a respeito da metodologia aplicada pela ANBIMA para construir as estruturas a termo de taxas de juros acessar: [https://www.anbima.com.br/data/files/18/42/65/50/4169E510222775E5A8A80AC2/est-termo\\_metodologia.pdf](https://www.anbima.com.br/data/files/18/42/65/50/4169E510222775E5A8A80AC2/est-termo_metodologia.pdf)

<sup>5</sup> Para a construção da Figura 1, os carregamentos usaram a média dos  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  médios da amostra das estruturas a termo das taxas de juros nominal e real obtidas junto a ANBIMA.

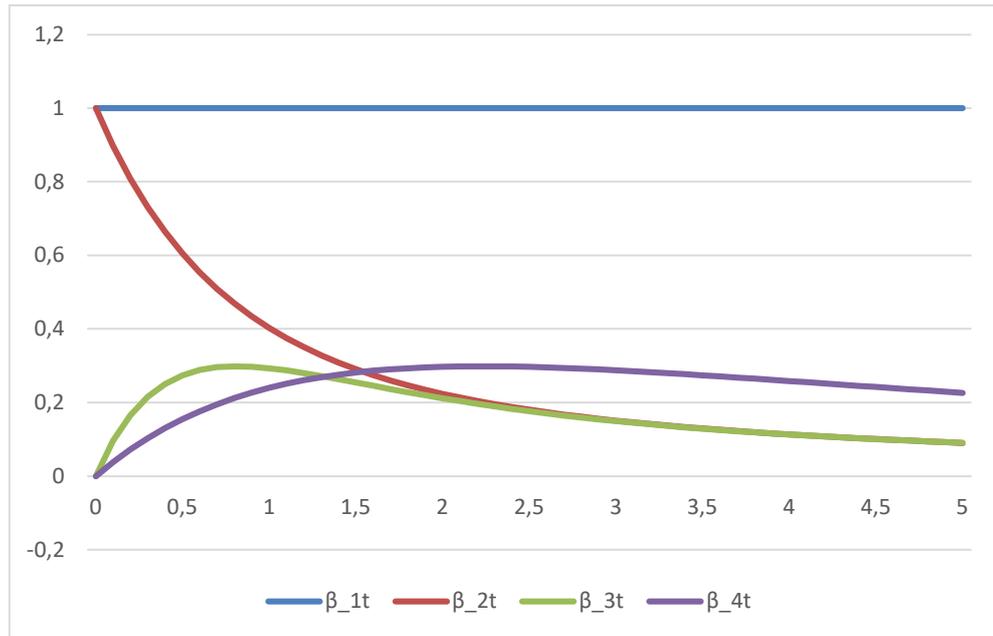


Figura 1 – Carregamento dos betas

Esse gráfico mostra o carregamento de cada um dos betas do modelo de Svensson (1994) em relação as maturidades  $\tau$ , em anos, utilizando os  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  médios da amostra coletada junto a ANBIMA.

Os parâmetros do modelo são determinados por uma minimização do somatório dos erros quadráticos dos preços de todos os títulos ponderados pelo inverso da *duration*<sup>6</sup>. Para esta minimização são comparados os preços indicativos dos títulos com os preços dos títulos calculados pelo modelo, sendo que os preços indicativos dos títulos são os resultados da aplicação das taxas consideradas justas pelas instituições associadas à ANBIMA para cada título, mesmo que não tenha havido negócios com o papel.

O manual da metodologia de construção das curvas da ANBIMA também narra que, a partir de 2005, houve um processo de alteração na configuração no mercado doméstico da estrutura das classes de remuneração de ativos, liquidez e maturidade da dívida pública federal (DPF) que permitiu a extração de informações importantes das curvas de juros, como o cálculo da inflação implícita.

Essa alteração de composição ocorreu através de um crescimento da participação na DPF de títulos prefixados e indexados a índices de preços, de 33,27% do total em janeiro de

<sup>6</sup> A justificativa apresentada pela ANBIMA para adoção do ponderador do inverso da *duration* foi que pequenas diferenças nos preços dos ativos de curto prazo implicam em grandes diferenças em suas taxas e o ponderador penaliza mais o erro para ativos de curto prazo e, ainda assim, considera a influência dos vencimentos de prazos mais longos.

2005 para 58,97% em junho de 2020, frente aos títulos pós-fixados e atrelados ao câmbio, de 64,04% do total em janeiro de 2005 para 41,03% em junho de 2020. As Figuras 2 e 3 ilustram, respectivamente, a composição da DPF em janeiro de 2005 e em junho de 2020.

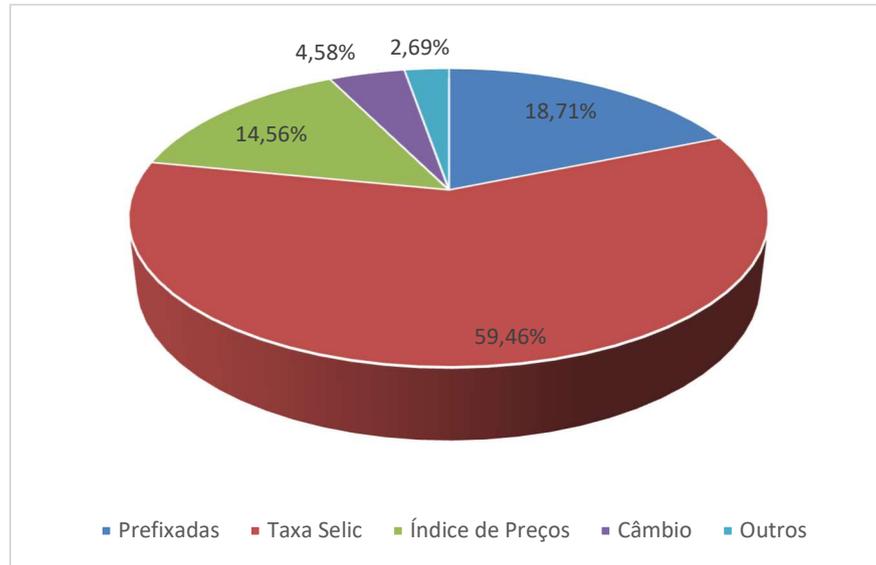


Figura 2 – Composição em janeiro de 2005

Fonte: Relatório Mensal da Dívida Pública Federal – Tesouro Nacional

Essa figura contém a distribuição da dívida pública federal em janeiro de 2005 entre os diferentes tipos de indexadores aplicados aos títulos da época.

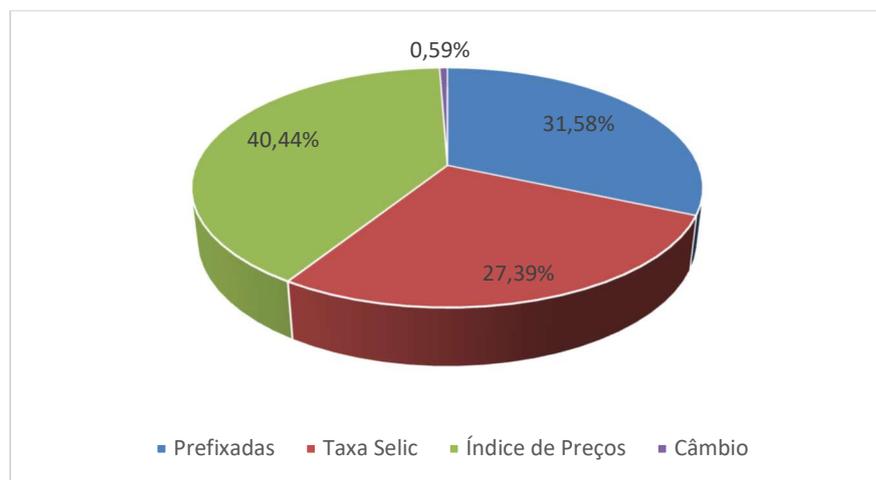


Figura 3 – Composição em junho de 2020

Fonte: Relatório Mensal da Dívida Pública Federal – Tesouro Nacional

Essa figura contém a distribuição da dívida pública federal em junho de 2020 entre os diferentes tipos de indexadores aplicados aos títulos da época.

O aumento da colocação primária por parte do Tesouro Nacional de títulos prefixados e indexados a índices de preço foi seguido pelo mercado secundário que presenciou um aumento significativo no volume negociado desses títulos e, assim, proveu liquidez para os preços utilizados na construção das estruturas a termo das taxas de juros. A Figura 4 apresenta o volume negociado no mercado secundário dos títulos prefixados e indexados a índices de preço entre 2005 e junho de 2020.

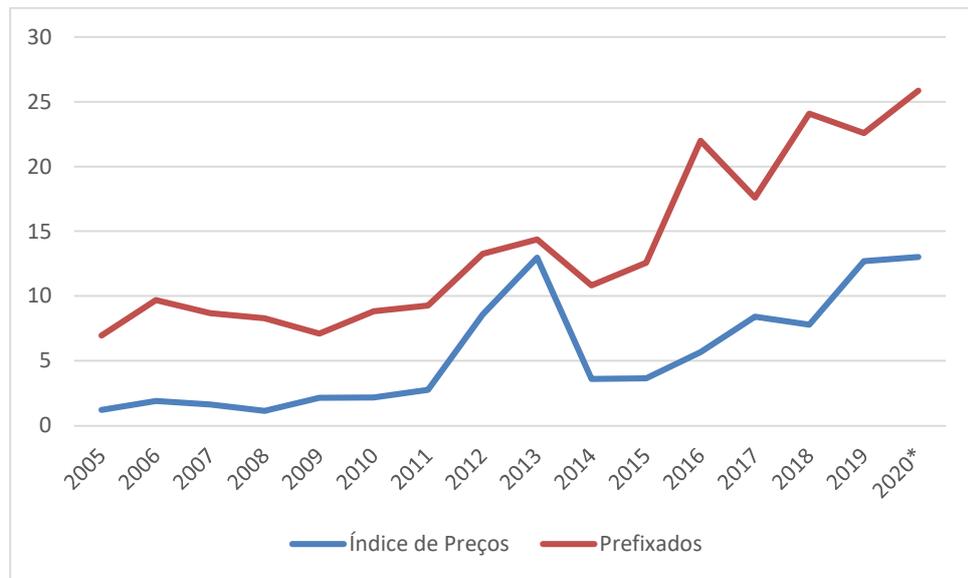


Figura 4 – Volume Negociado em Bilhões de R\$

Fonte: Relatório Mensal da Dívida Pública Federal – Tesouro Nacional

Esta figura apresenta o volume anual negociado no mercado secundário de títulos prefixados e indexados a índices de preço em bilhões de reais entre 2005 e junho de 2020.

Esses movimentos permitiram que a ANBIMA passasse a extrair a BEIR das estruturas a termo das taxas de juros nominais e reais através da equação ou identidade de Fisher:

$$1 + \pi_t^{(\tau)} = \frac{1 + i_t^{(\tau)}}{1 + r_t^{(\tau)}} \quad (2)$$

Onde,

$\pi_t^{(\tau)}$  é a *break-even inflation rate* ou BEIR para a maturidade  $\tau$  na data  $t$ ;

$i_t^{(\tau)}$  é a taxa de juros nominal para a maturidade  $\tau$  na data  $t$ ;

$r_t^{(\tau)}$  é a taxa de juros real para a maturidade  $\tau$  na data  $t$ ;

### 3. Descrição dos Dados

#### 3.1 ANBIMA

A construção da base de dados foi iniciada com a coleta na ANBIMA dos betas e lambdas diários estimados para as estruturas a termo das taxas de juros nominais e reais, entre setembro de 2009 e março de 2020<sup>7</sup>, alcançando um total de 2631 observações para cada uma das variáveis. A Tabela 1 apresenta algumas estatísticas descritivas dos betas e lambdas para a curva de juros nominais enquanto a Tabela 2 tem as mesmas informações para a curva de juros reais.

Tabela 1 – Estatística Descritiva dos Fatores da Estrutura a Termo das Taxas de Juros Nominal

PARÂMETROS	MÉDIA	MEDIANA	DESVIO PADRÃO	MÁXIMO	MÍNIMO
$\beta_{1t}$	0,1206	0,1194	0,0211	0,2262	0,0735
$\beta_{2t}$	-0,0217	-0,0229	0,0227	0,0286	-0,0848
$\beta_{3t}$	-0,0312	-0,0445	0,0870	0,355	-2,892
$\beta_{4t}$	-0,0095	-0,0142	0,0890	2,8570	-0,351
$\lambda_{1t}$	2,0357	1,757	0,8345	6,719	0,523
$\lambda_{2t}$	0,9604	0,8019	0,6524	3,077	0,03

Fonte: ANBIMA

Esta tabela apresenta as estatísticas descritivas dos fatores do modelo de Svensson (1994) para a estrutura a termo das taxas de juros nominal da ANBIMA para o período analisado.

<sup>7</sup> A base de dados se iniciou em setembro de 2009, pois foi a partir desse momento que a ANBIMA começou a disponibilizar em seu site as informações a respeito das estruturas a termo das taxas de juros da mesma maneira como o faz até a data de construção deste trabalho.

Tabela 2 – Estatística Descritiva dos Fatores da Estrutura a Termo das Taxas de Juros Real

PARÂMETROS	MÉDIA	MEDIANA	DESVIO PADRÃO	MÁXIMO	MÍNIMO
$\beta_{1t}$	0,0561	0,0565	0,00986	0,0928	0,0177
$\beta_{2t}$	0,0354	0,0102	0,1777	2,6665	-0,0964
$\beta_{3t}$	-0,0318	-0,0767	2,405	118,04	-5,653
$\beta_{4t}$	-0,0527	0,0159	2,392	5,522	-117,96
$\lambda_{1t}$	2,38	2,0436	1,373	10,00	0,0529
$\lambda_{2t}$	0,647	0,5731	0,4917	3,591	0,03

Fonte: ANBIMA

Esta tabela apresenta as estatísticas descritivas dos fatores do modelo de Svensson (1994) para a estrutura a termo das taxas de juros real da ANBIMA para o período analisado.

O período analisado apresenta, então, uma taxa de juros nominal de longo prazo mediana de 11,94% com uma inclinação positiva que traz o valor médio da taxa de curto prazo para 9,65% e a taxa de juros real mediana de longo prazo de 5,65% com uma inclinação negativa que traz o valor mediano da taxa de curto prazo para 6,67%. Também se nota que existem *outliers*, em especial para os  $\beta_{3t}$  e  $\beta_{4t}$ , em ambas as curvas que parecem se concentrar em dias nos quais a otimização aplicada pela ANBIMA encontra valores muito próximos para  $\lambda_{1t}$  e  $\lambda_{2t}$ .

Conforme dito, além das estruturas a termo das taxas de juros nominais e reais, a ANBIMA divulga diariamente as taxas calculadas da BEIR para vértices selecionados. Esses vértices dependem dos prazos dos papéis que compõe a amostra utilizada na estimação. Para o período explorado o número de vértices apresentados varia diariamente, na amostra foram encontrados dias com 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 20 ou 21 vértices, sendo eles 126, 252, 378, 504, 630, 756, 882, 1008, 1134, 1260, 1386, 1512, 1638, 1764, 1890, 2016, 2142, 2268, 2394, 2520, 2646 dias úteis. É importante ressaltar que independentemente do número de vértices para cada dia da amostra os vértices em si eram um subgrupo destes apresentados. A Tabela 3 apresenta algumas estatísticas descritivas de cada um desses vértices.

Tabela 3 – Estatísticas Descritivas dos Vértices da BEIR

<b>VÉRTICE</b>	<b>PRAZOS (ANOS)</b>	<b>MÉDIA</b>	<b>MEDIANA</b>	<b>DESVIO PADRÃO</b>	<b>MÁXIMO</b>	<b>MÍNIMO</b>
<b>126</b>	0,5	0,05621	0,05547	0,01524	0,11186	0,02432
<b>252</b>	1,0	0,05579	0,05593	0,01340	0,09359	0,02850
<b>378</b>	1,5	0,05553	0,05552	0,01223	0,09758	0,03380
<b>504</b>	2,0	0,05504	0,05549	0,01146	0,09935	0,03421
<b>630</b>	2,5	0,05479	0,05545	0,01083	0,09922	0,03481
<b>756</b>	3,0	0,05471	0,05555	0,01028	0,09804	0,03543
<b>882</b>	3,5	0,05475	0,05581	0,00982	0,09640	0,03593
<b>1008</b>	4,0	0,05485	0,05592	0,00944	0,09468	0,03631
<b>1134</b>	4,5	0,05498	0,05612	0,00914	0,09305	0,03650
<b>1260</b>	5,0	0,05513	0,05632	0,00892	0,09161	0,03662
<b>1386</b>	5,5	0,05528	0,05638	0,00876	0,09037	0,03669
<b>1512</b>	6,0	0,05543	0,05646	0,00865	0,08933	0,03672
<b>1638</b>	6,5	0,05557	0,05651	0,00858	0,08846	0,03672
<b>1764</b>	7,0	0,05563	0,05649	0,00854	0,08796	0,03669
<b>1890</b>	7,5	0,05557	0,05642	0,00855	0,08761	0,03665
<b>2016</b>	8,0	0,05568	0,05648	0,00854	0,08734	0,03659
<b>2142</b>	8,5	0,05580	0,05661	0,00854	0,08714	0,03652
<b>2268</b>	9,0	0,05576	0,05661	0,00831	0,08699	0,03644
<b>2394</b>	9,5	0,05634	0,05708	0,00712	0,08687	0,03635

VÉRTICE	PRAZOS (ANOS)	MÉDIA	MEDIANA	DESVIO PADRÃO	MÁXIMO	MÍNIMO
2520	10,0	0,05766	0,05748	0,00744	0,08679	0,03626
2646	10,5	0,05919	0,06047	0,01026	0,08673	0,03617

Fonte: ANBIMA

Esta tabela apresenta as estatísticas descritivas para cada um dos vinte e um vértices da inflação implícita apresentados pela ANBIMA para o período analisado.

A BEIR mediana da amostra apresenta, então, uma certa estabilidade em um patamar de 5,55% nos primeiros 5 vértices, com exceção do segundo, até que, a partir do sexto vértice, começa a desenvolver uma inclinação positiva que aumenta nos últimos 3 vértices, com especial atenção para o último. Ademais, se repara que o desvio padrão das taxas começa mais alto e vai reduzindo ao se alongar o prazo, com exceção do último vértice.

### 3.2 Relatório Focus

Com o intuito de se comparar as taxas de BEIR que serão estimadas com as expectativas de inflação de agentes de mercado se coletou, junto ao Banco Central, a série diária da mediana da “Inflação acumulada para os próximos 12 meses – suavizada” para o mesmo período que os dados obtidos junto à ANBIMA. Esta série contém as declarações dos membros das instituições financeiras e consultorias a respeito das expectativas destes para a variação do IPCA no prazo de 1 ano.

Optou-se pela série suavizada, pois, segundo definição divulgada pelo próprio Banco Central, esta mantém a tendência subjacente das expectativas sem as descontinuidades da série original, que ocorrem toda vez que um indicador para a inflação é divulgado e a série passar a incorporar um novo mês à frente em substituição ao mês para o qual o índice tornou-se conhecido. A Tabela 4 apresenta as estatísticas descritivas para essa série.

Tabela 4 – Estatísticas Descritivas da Série de Variação de 12 Meses do IPCA Suavizada

SÉRIE	MÉDIA	MEDIANA	DESVIO PADRÃO	MÁXIMO	MÍNIMO
IPCA 12 MESES - SUAVIZADA	0,0513	0,0534	0,0094	0,0713	0,0340

Fonte: Relatório Focus

Esta tabela apresenta as estatísticas descritivas para a série diária da mediana da “Inflação acumulada para os próximos 12 meses – suavizada” obtida junto ao Relatório Focus para o período analisado.

Esse exercício se mostra interessante, pois, como foi apontado na seção 1, Vicente e Graminho (2015) apresentaram um modelo de decomposição da BEIR em expectativa de inflação, termo de convexidade, prêmios de liquidez e prêmio de risco de inflação no mercado brasileiro. E, chegaram à conclusão que o termo de convexidade é muito pequeno, o prêmio de liquidez não possui relevância e o prêmio de risco de inflação é pequeno para horizontes curtos enquanto é variável no tempo para horizontes longos. E, mais relevantemente, demonstram que a expectativa de inflação é o principal componente da BEIR. Deste modo, se espera que a comparação proposta nesta seção entre a BEIR e as expectativas de inflação de agentes de mercado apresente uma relação significativa.

### 3.3 Bloomberg

Finalmente, foram obtidas as variáveis financeiras e macroeconômicas que farão parte da análise econométrica frente aos fatores de nível, inclinação e curvatura da BEIR. Todas as variáveis foram coletadas no Bloomberg:

- Câmbio → o histórico diário da cotação de fechamento do Real (BRL) em relação ao dólar americano (USD). É relevante por ser indicativo do momento econômico no Brasil e, também, pelo efeito *pass-through* estudado por Goldfajn e Werlang (2000);
- *Credit Default Swap* (CDS) → o histórico diário da cotação do CDS do Brasil para o prazo de 5 anos, por ser o de maior liquidez. Como esse instrumento garante contra um

*default* do governo brasileiro ele funciona como uma aproximação para a situação atual da economia brasileira.

- CRB → o histórico diário do índice Thomson Reuters/Core Commodity de preços de *commodities*. Uma vez que o Brasil é um grande exportador de *commodities* é um indicador do momento da economia brasileira.
- IBOV → o histórico diário do índice IBOV que representa um *proxy* para o nível de atividade na economia representado pelo valor das ações das empresas mais importantes do mercado de capitais brasileiro.
- CPI → o histórico semanal da variação do Índice de Preços ao Consumidor calculado pela Fundação Instituto de Pesquisas Econômicas para a cidade de São Paulo. Funciona como um indicador da inflação nacional que possui frequência semanal, diferentemente dos índices mais comuns que são divulgadas apenas mensalmente.

Tabela 5 – Estatística Descritiva das Variáveis Financeiras e Macroeconômicas

VARIÁVEL	MÉDIA	MEDIANA	DESVIO PADRÃO	MÁXIMO	MÍNIMO
<b>CÂMBIO</b>	2,74	2,57	0,86	4,82	1,54
<b>CDS</b>	189,45	163,48	86,13	533,32	89,31
<b>CRB</b>	448,50	436,40	44,74	579,68	368,86
<b>IBOV</b>	65.664,73	61.691,20	16.741,60	119.527,60	37.497,50
<b>CPI</b>	0,0043	0,0040	0,0033	0,0178	-0,0042

Fonte: Bloomberg

Esta tabela apresenta as estatísticas descritivas para as variáveis financeiras e macroeconômicas utilizadas nas regressões lineares obtidas na Bloomberg.

## 4. Metodologia

### 4.1 Estimação do Modelo de Svensson (1994)

Conforme dito na seção anterior, a informação diária distribuída pela ANBIMA se trata apenas dos betas e lambdas para as estruturas a termo das taxas de juros nominais e reais e os valores das taxas para alguns vértices selecionados para as estruturas a termo das taxas de juros nominais, reais e para a BEIR. Deste modo, não são disponibilizados os betas e lambdas para a inflação implícita, de modo a encontrá-los se torna necessária a estimação do modelo de Svensson (1994) para a curva da BEIR.

Esta estimação, ao contrário do modelo estimado pela ANBIMA, será feita com os parâmetros lambda fixos ao longo do tempo e, por simplificação, usará as taxas da inflação implícita calculadas pela ANBIMA, mesmo sabendo que estas, por serem derivadas das taxas de juros nominal e real através de um modelo, possuem um erro de estimação.

Para realizar a estimação da curva pelo modelo de Svensson (1994), primeiramente, se lineariza o polinômio assumindo lambdas fixos e para uma iteração inicial se calcula  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , respectivamente, como as médias dos  $\lambda_{1t}$  e  $\lambda_{2t}$  das amostras das estruturas a termo das taxas de juros nominal e real. Assume-se, então, a seguinte forma matricial:

$$Y_t = A_t \cdot \beta_t \quad (3)$$

Onde;

$Y_t$  é um vetor  $n \times 1$  com as taxas da BEIR informadas pela ANBIMA disponíveis na data  $t$ ;

$A_t$  é uma matriz  $n \times 4$  com os fatores de carregamento dos betas para cada um dos vértices na data  $t$ ;

$\beta_t$  é um vetor  $4 \times 1$  com os valores dos betas para a data  $t$ ;

Para, a partir da equação (3), se fazer a transformação matricial proposta na equação (4) com o intuito de se estimar o vetor  $\hat{\beta}_t$  a partir dos dados disponíveis presentes no vetor  $Y_t$  e na matriz  $A_t$ .

$$(A_t^T \cdot A_t)^{-1} \cdot A_t^T \cdot Y_t = (A_t^T \cdot A_t)^{-1} \cdot A_t^T \cdot A_t \cdot \hat{\beta}_t \quad (4)$$

Onde,  $(\mathbf{A}_t^T \cdot \mathbf{A}_t)^{-1} \cdot \mathbf{A}_t^T \cdot \mathbf{A}_t$  resulta em uma matriz identidade  $\mathbf{I}$ , logo a transformação permite a partir de  $\mathbf{A}_t$  e  $\mathbf{Y}_t$  se obter o  $\hat{\boldsymbol{\beta}}_t$ . Uma vez aplicada a transformação para toda a amostra coletada na ANBIMA haverá um vetor  $4 \times 1$ ,  $\hat{\boldsymbol{\beta}}_t$ , para cada observação, assim será possível, através da equação (5) descrita abaixo, obter um vetor  $n \times 1$ ,  $\hat{\mathbf{Y}}_t$ , para cada data presente na amostra.

$$\hat{\mathbf{Y}}_t = \mathbf{A}_t \cdot \hat{\boldsymbol{\beta}}_t \quad (5)$$

Em posse dos vetores das taxas da BEIR da ANBIMA e as estimadas para cada uma das datas analisadas,  $\mathbf{Y}_t$  e  $\hat{\mathbf{Y}}_t$ , é possível construir duas matrizes  $21 \times 2631$ ,  $\mathbf{M}$  e  $\hat{\mathbf{M}}$ , agregando todos os vetores, onde cada linha será uma maturidade da BEIR e cada coluna será uma data da amostra. A matriz possui 21 linhas por esse ser o número máximo de vértices presentes na amostra, nas datas em que há menos vértices da BEIR na ANBIMA os ausentes, em ambas as matrizes, são preenchidos com valor zero.

Então, se conduz a subtração  $\mathbf{M} - \hat{\mathbf{M}}$ , obtendo uma matriz  $21 \times 2631$  com as diferenças entre as taxas ANBIMA e as estimadas para todas as maturidades e datas presentes na amostra, chamada  $\mathbf{M}_{dif}$ . Por fim, se eleva ao quadrado cada um dos valores da  $\mathbf{M}_{dif}$  para que não ocorra um cancelamento das diferenças positivas pelas diferenças negativas, alcançando a matriz  $\mathbf{M}_{difquadrado}$ .

O passo seguinte é obter a raiz do erro quadrático médio (REQM) que é a raiz<sup>8</sup> do somatório dos valores da matriz  $\mathbf{M}_{difquadrado}$  dividido pelo total de número de vértices válidos para as datas analisadas, isto é, todos os vértices de todas as colunas cujo valor não fosse zero, conforme a equação (6) abaixo.

$$REQM = \sqrt{\frac{\sum \mathbf{M}_{difquadrado}}{n_{verticesvalidos}}} \quad (6)$$

---

<sup>8</sup> Optou-se por usar a raiz dos erros quadráticos para que o resultado apresentado pudesse ser aproximado como um erro em *basis points*.

## 4.2 Otimização dos Lambdas

Detendo o resultado da REQM e usando os  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  médios da amostra se aplica uma otimização para averiguar se existem  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  ótimos que produzem uma REQM menor do que aquele obtido pelos valores médios.

A solução é obtida numericamente, para tal se definiu uma banda entre 0,50 e 3,00<sup>9</sup>, onde é testada toda combinação de valores de  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  até a segunda casa decimal desencadeando em 251 possíveis valores para cada lambda e 63001 cenários de combinações. Para cada um dos cenários se realizam as equações (4), (5) e (6) concluindo com uma lista associando um valor de REQM para cada uma das combinações de  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ .

Seleciona-se desta lista aqueles  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  associados à menor REQM e com eles os vetores  $\hat{\beta}_t$  ótimos para cada uma das datas presentes na amostra, e então, agrega-se estes em uma matriz  $2631 \times 4$ ,  $\hat{\beta}_{\text{ótimos}}$ , onde cada coluna será um dos betas da fórmula de Svensson (1994) e as linhas representaram seus valores ao longo do período analisado.

## 4.3 Regressões Lineares

Uma vez elaborada essa base de dados, serão aplicadas quatro regressões lineares onde cada uma das séries temporais dos parâmetros  $\hat{\beta}_{1t}$ ,  $\hat{\beta}_{2t}$ ,  $\hat{\beta}_{3t}$  e  $\hat{\beta}_{4t}$  ótimos encontrados serão a variável dependente e as variáveis macroeconômicas e financeiras listadas na seção 3 serão utilizadas como variáveis independentes. A construção de regressões lineares está presente em várias investigações empíricas no universo das pesquisas e, por isso, encontra-se uma extensa literatura acerca do tema. No caso deste trabalho, como usaremos mais de uma variável independente na tentativa de explicar a variável dependente usaremos o modelo de regressão linear múltiplo.

Conforme dito, a regressão linear utilizará como variáveis independentes as variáveis macroeconômicas e financeiras listadas na seção 3, como uma delas tem frequência semanal será necessário reduzir a amostra dos betas e das outras variáveis independentes de 2631

---

<sup>9</sup> Valores selecionados por serem menores para o limite inferior e maiores para o limite superior em relação à média e mediana dos  $\lambda_{1t}$  e  $\lambda_{2t}$  apresentados nas Tabelas 1 e 2.

observações diárias para 547 observações semanais. Isto se torna possível coletando o valor de  $\hat{\beta}_{1t}$ ,  $\hat{\beta}_{2t}$ ,  $\hat{\beta}_{3t}$  e  $\hat{\beta}_{4t}$  ótimos para as segundas-feiras da amostra ou o primeiro dia útil subsequente formando a matriz  $547 \times 4$   $\hat{\beta}_{semanal, \acute{o}timos}$  e os valores da taxa de câmbio, *credit default swap*, índice de *commodity* CRB, índice IBOV para todas as segundas-feiras da amostra ou o primeiro dia útil subsequente e o CPI, como é reportado semanalmente, usa o último dado divulgado até a data dos betas, formando a matriz  $547 \times 5$  **VI**.

De modo a se garantir que as variáveis independentes já sejam definitivas e conhecidas antes da construção da estrutura a termo das taxas de juros e, conseqüentemente, dos betas é feita mais uma redução na matriz  $\hat{\beta}_{semanal, \acute{o}timos}$  na qual se descarta a informação da primeira semana dos betas e na matriz **VI** na qual se descarta a informação da última semana das variáveis independentes transformando-as em matrizes  $546 \times 4$  e  $546 \times 5$ , respectivamente. Na ocorrência de haver um dado faltante na série será repetido o valor da observação imediatamente anterior. Deste modo, as regressões serão feitas para cada um dos betas representados nas colunas de  $\hat{\beta}_{semanal, \acute{o}timos}$  em relação às cinco variáveis independentes contidas nas colunas de **VI**. A Tabela 6 descreve matematicamente as regressões aplicadas.

Tabela 6 – Regressões

$$\hat{\beta}_{1t} = b_0 + b_1 \text{Cambio}_{t-1} + b_2 \text{CDS}_{t-1} + b_3 \text{CRB}_{t-1} + b_4 \text{IBOV}_{t-1} + b_5 \text{CPI}_{t-1}$$

$$\hat{\beta}_{2t} = b_0 + b_1 \text{Cambio}_{t-1} + b_2 \text{CDS}_{t-1} + b_3 \text{CRB}_{t-1} + b_4 \text{IBOV}_{t-1} + b_5 \text{CPI}_{t-1}$$

$$\hat{\beta}_{3t} = b_0 + b_1 \text{Cambio}_{t-1} + b_2 \text{CDS}_{t-1} + b_3 \text{CRB}_{t-1} + b_4 \text{IBOV}_{t-1} + b_5 \text{CPI}_{t-1}$$

$$\hat{\beta}_{4t} = b_0 + b_1 \text{Cambio}_{t-1} + b_2 \text{CDS}_{t-1} + b_3 \text{CRB}_{t-1} + b_4 \text{IBOV}_{t-1} + b_5 \text{CPI}_{t-1}$$

Esta tabela apresenta as regressões lineares aplicadas no trabalho com os betas do modelo de Svensson (1994) como variáveis independentes e as variáveis financeiras e macroeconômicas como variáveis independentes.

Onde;

$\hat{\beta}_{1t}$ ,  $\hat{\beta}_{2t}$ ,  $\hat{\beta}_{3t}$ ,  $\hat{\beta}_{4t}$  são as séries temporais para cada um dos betas estimados para o modelo de Svensson (1994) da semana 2 a semana 547;

$b_0$ ,  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $b_3$ ,  $b_4$ ,  $b_5$  são os coeficientes que serão estimados por cada uma das regressões lineares para cada um dos betas;

$Cambio_{t-1}$  é a série temporal do histórico da cotação de fechamento do real em relação ao dólar americano da semana 1 a semana 546;

$CDS_{t-1}$  é a série temporal do histórico da cotação do CDS do Brasil para o prazo de 5 anos da semana 1 a semana 546;

$CRB_{t-1}$  é a série temporal do histórico do índice Thomson Reuters/Core Commodity da semana 1 a semana 546;

$IBOV_{t-1}$  é a série temporal do histórico do índice IBOV da semana 1 a semana 546;

$CPI_{t-1}$  é a série temporal do histórico da variação do Índice de Preços ao Consumidor calculado pela Fundação Instituto de Pesquisas Econômicas para a cidade de São Paulo da semana 1 a semana 546;

#### 4.4 Projeção *Out-of-Sample*

Posteriormente, será feita uma análise da capacidade preditiva das variáveis macroeconômicas e financeiras selecionadas em relação à  $\hat{\beta}_{1t}$ ,  $\hat{\beta}_{2t}$ ,  $\hat{\beta}_{3t}$  e  $\hat{\beta}_{4t}$ . Para tal, será refeita a otimização descrita para encontrar  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  ótimos só que desta vez com os dados limitados até o fim de 2015, encontrando  $\lambda_{1,2015}$  e  $\lambda_{2,2015}$  ótimos, para que se possa fazer uma projeção *out-of-sample* sem que eles contenham informações do período de exercício das projeções.

A partir da otimização descrita no parágrafo anterior é possível obter a matriz  $2631 \times 4$ ,  $\hat{\beta}_{\text{ótimos},2015}$ , onde cada coluna será um dos betas da fórmula de Svensson (1994) e as linhas representaram seus valores diários só que utilizando os lambdas calculados com os dados limitados até o final de 2015. Então, se repete o procedimento de redução da frequência das observações de diárias para semanais com a seleção de  $\hat{\beta}_{1t}$ ,  $\hat{\beta}_{2t}$ ,  $\hat{\beta}_{3t}$  e  $\hat{\beta}_{4t}$  ótimos para as segundas-feiras da amostra ou o primeiro dia útil subsequente, com exceção da primeira segunda-feira uma vez que é necessário que as observações das variáveis independentes preceda as dos betas, desencadeando na matriz  $546 \times 4$   $\hat{\beta}_{\text{semanal},\text{ótimos},2015}$ .

Enquanto a amostra das variáveis independentes é a mesma de antes com os valores da taxa de câmbio, *credit default swap*, índice de *commodity* CRB, índice IBOV para todas as segundas-feiras da amostra ou o primeiro dia útil subsequente, com exceção da última segunda-

feira uma vez que não existem observações de betas para a semana seguinte, e o CPI, como é reportado semanalmente, usa o último dado divulgado até a data dos betas, isto é, se reutiliza a matriz  $546 \times 5 \mathbf{VI}$ .

As 546 linhas na matriz  $\hat{\beta}_{semanal, \acute{o}timos, 2015}$  representam observações da semana 2 a semana 547 e na matriz  $\mathbf{VI}$  representam observações da semana 1 a semana 546 presentes durante todo o período analisado de setembro de 2009 a março de 2020, sendo as 327 primeiras linhas as observações nas quais estão os betas até o final de 2015 e as variáveis independentes até a semana imediatamente anterior. Logo, esta será a primeira janela móvel para se fazer a projeção *out-of-sample*, isto é, se repetirá as regressões apresentadas na Tabela 6 com essas 327 observações e serão encontrados valores para os coeficientes  $b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5$  da regressão para  $\hat{\beta}_{1t}, \hat{\beta}_{2t}, \hat{\beta}_{3t}$  e  $\hat{\beta}_{4t}$ .

O próximo passo será coletar os valores das variáveis independentes da observação 328 e usar os  $b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5$  calculados para obter  $\hat{\beta}_{1tpro}, \hat{\beta}_{2tpr}, \hat{\beta}_{3tpro}, \hat{\beta}_{4tp}$ , isto é, os betas projetados para a semana seguinte. Uma vez na posse destes betas projetados serão feitos os mesmos procedimentos narrados pelas equações (5) e (6), ou seja, a partir dos betas projetados se calculam taxas projetadas para todos os vértices válidos através do modelo de Svensson (1994) e, então, se obtém o REQM das projeções frente as taxas da BEIR obtidas da ANBIMA.

Desta forma, existem dois REQMs sutilmente distintos. Primeiro, se têm o REQM alcançado pela diferença da BEIR estimada através dos betas ótimos frente a BEIR da ANBIMA e, em segundo lugar, o REQM auferido, para cada iteração da projeção, pela diferença entre a BEIR projetada a partir da regressão linear frente a BEIR da ANBIMA. Para se distinguir os dois, quando se for tratar do segundo se utilizará a denominação  $REQM_{projeção}^i$ .

A fim de detalhar melhor a capacidade de previsão variáveis macroeconômicas e financeiras também serão calculados um  $REQM_{projeção}^i$  de curto prazo e um  $REQM_{projeção}^i$  de longo prazo para analisar se existe uma divergência na aptidão do modelo para prever as taxas da BEIR mais curtas frente às mais longas. Isto se dará com a repetição do processo narrado no parágrafo anterior com o detalhe da separação das taxas projetadas em um segmento de curto prazo com todos os vértices diferentes de zero com maturidade de até dois anos, inclusive, para cada iteração e um segmento de longo prazo com todos os vértices diferentes de zero a partir de dois anos para cada iteração da projeção *out-of-sample*. As equações (7) e (8) descrevem as

metodologias aplicadas para cálculo do  $REQM_{projecção}^i$  de curto e longo prazo para cada iteração  $i$  da projeção *out-of-sample*.

$$REQM_{projecçãocp}^i = \sqrt{\frac{\sum M_{difquadrop}^i}{n_{verticescp}^i}} \quad (7)$$

$$REQM_{projecçãolp}^i = \sqrt{\frac{\sum M_{difquadrop}^i}{n_{verticeslp}^i}} \quad (8)$$

Toda projeção *out-of-sample* descrita até agora trata-se apenas da primeira iteração do método como um todo. Assim, se inicia com a iteração  $i = 1$ , onde a regressão é feita da observação 1 a 327 e cujo resultado é aplicado à observação 328 das variáveis independentes para se obter a projeção dos betas para o, subsequente, cálculo das taxas e do  $REQM_{projecção}^i$ . Depois é feito a mesma coisa, para a iteração  $i = 2$ , a partir da regressão da observação 2 a 328, e assim por diante, ou seja, é definida uma janela móvel de 327 observações que é repetida por 219 vezes até que se tenha uma projeção até a observação 546, sendo esta a última da amostra. Ressalta-se que em todo este processo se utilizam os mesmos  $\lambda_{1,2015}$  e  $\lambda_{2,2015}$ , pois um recálculo destes para cada iteração causaria um peso computacional grande.

#### 4.5 Passeio Aleatório

Por fim, será feita uma comparação do modelo de projeção apresentado com um *Random Walk*, uma vez que Carriero, Kapetanios e Marcellino (2012) mostraram que este tipo de modelo tem uma capacidade preditiva superior a um grande número de exercícios de projeção *out-of-sample* para estruturas a termo das taxas de juros. O *Random Walk* será calculado conforme a equação (9).

$$\hat{Y}_{RWt} = Y_{t-1} + NA_{t-1} \quad (9)$$

Onde,

$\hat{Y}_{RWt}$  é um vetor  $n \times 1$  com os valores projetados por *Random Walk* para as taxas de cada vértice presente na amostra da BEIR obtida junto à ANBIMA na data  $t$ ;

$Y_{t-1}$  é um vetor  $n \times 1$  com as taxas da BEIR informadas pela ANBIMA disponível na data  $t-1$ ;

$NA_{t-1}$  é um vetor  $n \times 1$  com valores selecionados aleatoriamente a partir de  $n$  distribuições normais com média 0 e desvios padrão iguais ao desvio padrão calculado das taxas da BEIR da ANBIMA para cada vértice usando dados disponíveis até  $t-1$ ;

Para determinar se as diferenças nas performances entre o modelo apresentado e o *Random Walk* são estatisticamente significativos é adotado o teste de Diebold e Mariano (1995) com perda quadrática e 5% de nível de significância. O teste de Diebold e Mariano (1995) é amplamente usado em econometria para comparação do poder de previsão de dois modelos distintos tendo como hipótese nula que ambos os modelos têm o mesmo poder de previsão e sua estatística de teste é assintoticamente distribuída como uma  $N(0,1)$ . Deste modo, a hipótese nula de não diferença é rejeitada se o módulo da estatística de teste calculada for superior ao valor  $z$  de uma tabela normal padronizada correspondente à 1 menos a metade do nível de significância do teste.

## 5. Resultados

### 5.1 Lambdas e Betas Médios

Conforme descrito na seção 4, a primeira iteração de cálculo é feita com  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  médios calculados a partir da amostra de  $\lambda_{1t}$  e  $\lambda_{2t}$  das estruturas a termos das taxas de juros nominal e real conseguidas junto à ANBIMA e, depois, são executadas as equações (4), (5) e (6) de onde resultam um vetor  $\hat{\beta}_t$  para cada data de amostra e um REQM que representa uma estimativa do erro existente no cálculo feito. A Tabela 7 apresenta os  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  médios e seu REQM, enquanto a Tabela 8 apresenta estatísticas descritivas dos betas encontrados nessa primeira iteração.

Tabela 7 – Valores de  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  médios e seu REQM

	$\lambda_1$	$\lambda_2$	REQM
<b>VALORES</b>	2,2078	0,8039	2,55E-04

Esta tabela apresenta os lambdas médios da amostra obtida da ANBIMA e a raiz do erro quadrático médio que as taxas geradas usando as equações (4), (5) e (6) a partir deles obtém frente as disponibilizadas pela ANBIMA.

Tabela 8 – Estatísticas Descritivas dos Betas para os Lambdas Médios

PARÂMETROS	MÉDIA	MEDIANA	DESVIO PADRÃO	MÁXIMO	MÍNIMO
$\hat{\beta}_{1t}$	0,0580	0,0575	0,0089	0,0864	0,0353
$\hat{\beta}_{2t}$	-0,0130	-0,0134	0,0419	0,1065	-0,1861
$\hat{\beta}_{3t}$	0,0244	0,0170	0,0594	0,3122	-0,1418
$\hat{\beta}_{4t}$	-0,0174	-0,0152	0,0218	0,0526	-0,1147

Esta tabela apresenta as estatísticas descritivas dos betas resultantes da equação (4) usando os lambdas médios da Tabela 7 e as taxas da inflação implícita da ANBIMA.

Uma vez que  $\hat{\beta}_{1t}$  representa o longo prazo e  $\hat{\beta}_{2t}$  a inclinação da BEIR, é possível extrair das tabelas que os lambdas médios geram uma curva com um valor mediano na amostra para a BEIR de longo prazo aproximadamente igual a 5,75% e no curto prazo de 4,41%.

## 5.2 Lambdas e Betas Ótimos

A Tabela 9 apresenta os  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  ótimos e seu REQM calculados da maneira descrita na seção 4, enquanto a Tabela 10 apresenta estatísticas descritivas dos betas ótimos encontrados a partir desses lambdas.

Tabela 9 – Valores de  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  ótimos e seu REQM

	$\lambda_1$	$\lambda_2$	REQM
<b>VALORES</b>	1,81	1,02	2,48E-04

Esta tabela apresenta os lambdas ótimos calculados e a raiz do erro quadrático médio que as taxas geradas usando as equações (4), (5) e (6) a partir deles obtém frente as disponibilizadas pela ANBIMA.

Tabela 10 – Estatísticas Descritivas dos Betas para os Lambdas Ótimos

PARÂMETROS	MÉDIA	MEDIANA	DESVIO PADRÃO	MÁXIMO	MÍNIMO
$\hat{\beta}_{1t}$	0,0577	0,0574	0,0087	0,0862	0,0356
$\hat{\beta}_{2t}$	-0,0113	-0,0130	0,0358	0,1014	-0,1445
$\hat{\beta}_{3t}$	0,0361	0,0306	0,0668	0,3484	-0,1307
$\hat{\beta}_{4t}$	-0,0281	-0,0245	0,0355	0,0723	-0,1835

Esta tabela apresenta as estatísticas descritivas dos betas resultantes da equação (4) usando os lambdas ótimos da Tabela 9 e as taxas da inflação implícita da ANBIMA.

Comparando-se as Tabelas 7 e 9, o primeiro que se nota é uma redução não muito significativa do REQM de aproximadamente 2,55 *basis points* para 2,48 *basis points*, entretanto quando se analisam todos os 63001 cenários de lambdas testados se encontra que o cenário mais próximo ao médio,  $\lambda_1 = 2,21$  e  $\lambda_2 = 0,80$ , seria apenas o 8427 com menor REQM, demonstrando que a otimização aplicada teve efeito desejado de encontrar combinações de  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  mais aderentes aos dados. Adicionalmente, os valores ótimos dos lambdas mudaram significativamente frente aos médios, o que gera uma alteração nas BEIRs calculadas por alterar os pontos onde as curvaturas das estruturas a termo estimadas atingem seus máximos.

Examinando as Tabelas 8 e 10, nota-se que a BEIR mediana de longo prazo praticamente se manteve a mesma indo de 5,75% para 5,74%, já a inclinação teve uma alteração pequena aumentando um pouco seu valor causando que a BEIR esperada de curto prazo fosse um pouco maior na casa dos 4,44%. As maiores alterações, contudo, são vistas nas estimativas

medias de  $\hat{\beta}_{3t}$  e  $\hat{\beta}_{4t}$ , que variaram em aproximadamente 80% e 61%, respectivamente, denotando alterações expressivas nas curvaturas.

### 5.3 Evolução dos Betas na Amostra

As Figuras 5, 6, 7 e 8 abaixo representam, respectivamente, a evolução dos  $\hat{\beta}_{1t}$ ,  $\hat{\beta}_{2t}$ ,  $\hat{\beta}_{3t}$  e  $\hat{\beta}_{4t}$  ótimos durante o período da amostra.

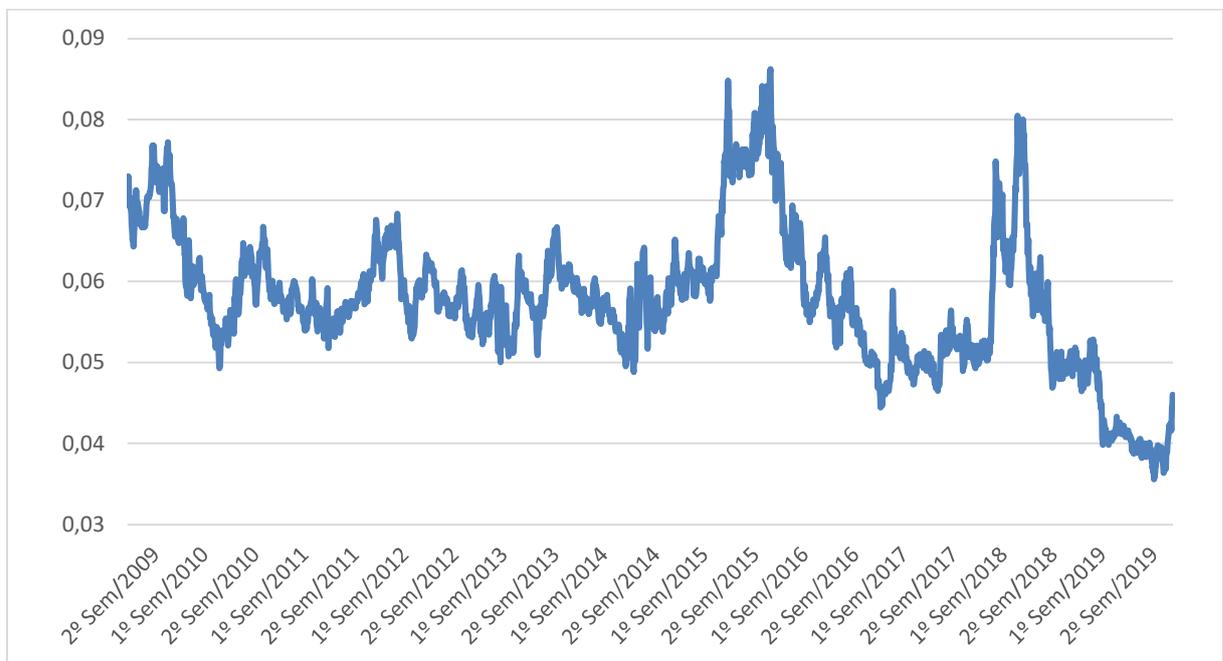


Figura 5 – Evolução de  $\hat{\beta}_{1t}$

Esta figura mostra os valores de  $\hat{\beta}_{1t}$  ótimos durante o período analisado.

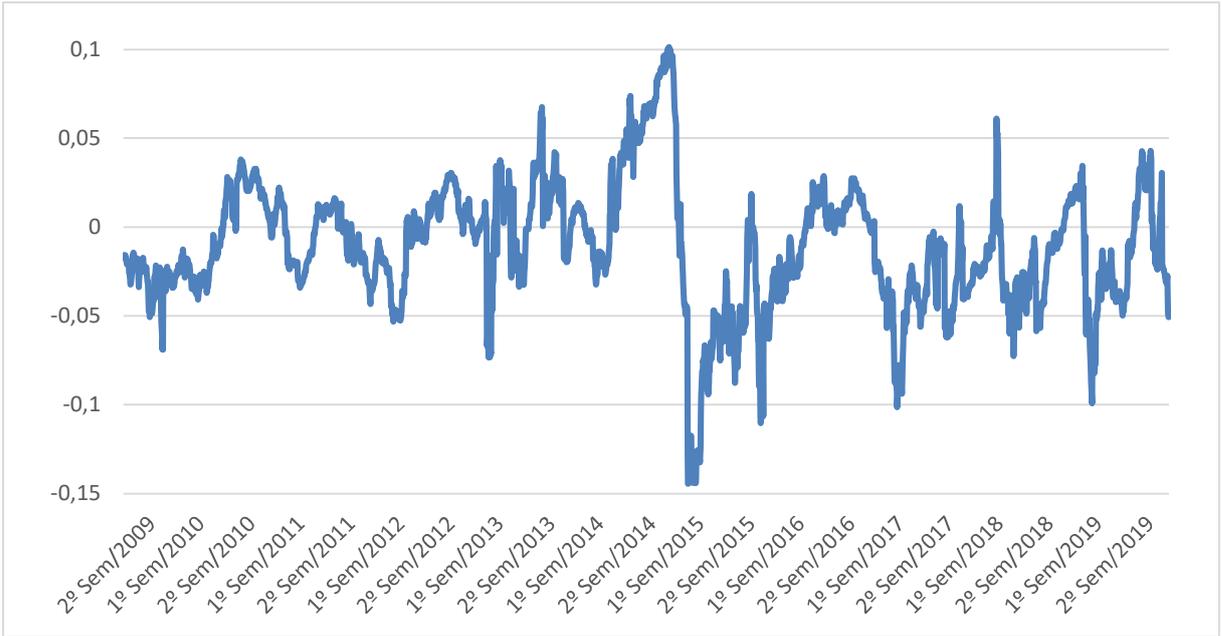


Figura 6 – Evolução de  $\hat{\beta}_{2t}$

Esta figura mostra os valores de  $\hat{\beta}_{2t}$  ótimos durante o período analisado.

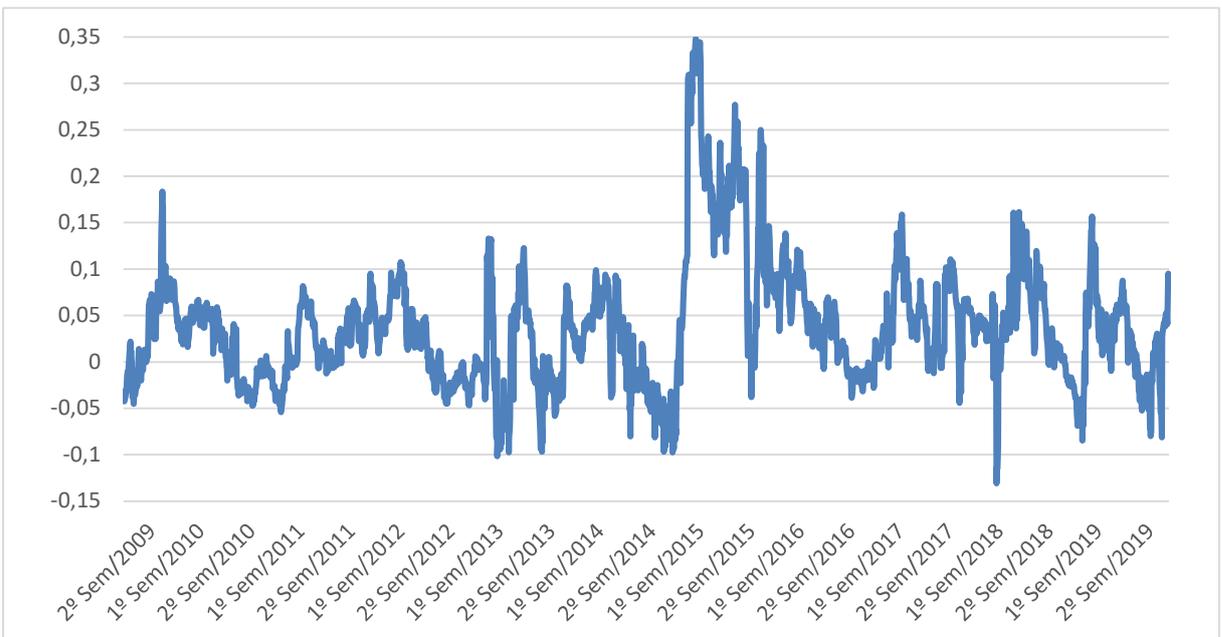


Figura 7 – Evolução de  $\hat{\beta}_{3t}$

Esta figura mostra os valores de  $\hat{\beta}_{3t}$  ótimos durante o período analisado.

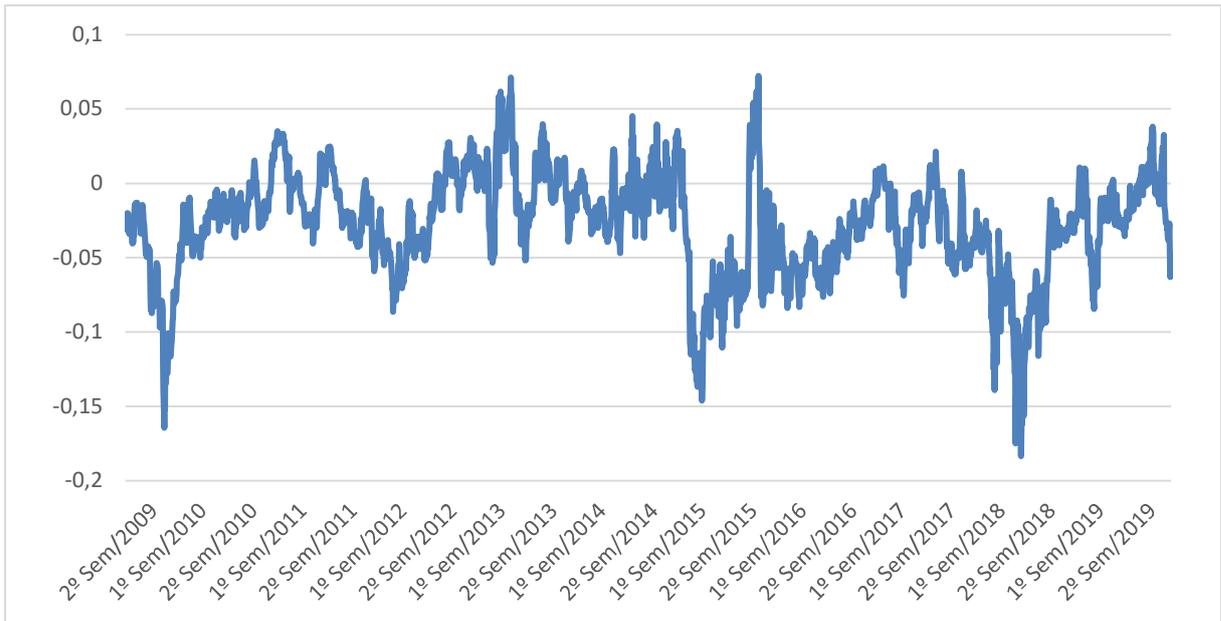


Figura 8 – Evolução de  $\hat{\beta}_{4t}$

Esta figura mostra os valores de  $\hat{\beta}_{4t}$  ótimos durante o período analisado.

A Figura 5 mostra uma certa estabilidade da BEIR de longo prazo, em um valor médio um pouco abaixo de 0,06, nos primeiros anos da análise, tendo subido ao longo do ano de 2015 para depois apresentar uma tendência de baixa até o final do período, apesar de haver um pico ao longo de 2018. A Figura 6 relata que a inclinação da curva ao longo da amostra variava entre -0,05 e 0,05 nos primeiros anos da amostra, já entre 2014 e 2015 há uma grande ruptura do  $\hat{\beta}_{2t}$  que atinge seu máximo e seu mínimo em um intervalo bem curto de tempo para depois se estabilizar em um patamar um pouco abaixo daquele de antes da quebra.

A Figura 7 mostra um certo controle das curvaturas que se mantiveram em grande parte entre -0,10 e 0,10 para  $\hat{\beta}_{3t}$  e -0,10 e 0,05 para  $\hat{\beta}_{4t}$  até que houve uma quebra significativa para ambos ao longo de 2015 para, depois, se concentrarem em patamares um pouco diferentes de antes, com  $\hat{\beta}_{3t}$  se situando um pouco acima do nível de antes da quebra e  $\hat{\beta}_{4t}$  um pouco abaixo, com ambos apresentando uma maior variabilidade após o choque.

Analisando todas as Figuras conjuntamente, vê-se que os betas apresentavam uma constância com pequenas alterações no início da amostra até que houve um choque relevante a partir do fim de 2014 continuando ao longo de 2015 que fez os betas assumirem valores consideravelmente diferentes dos seus históricos por aproximadamente um ano, até que, a partir

de 2016, voltassem a se estabilizar em parâmetros levemente distintos daqueles de antes da ruptura ocorrida, sendo  $\hat{\beta}_{1t}$ ,  $\hat{\beta}_{2t}$  e  $\hat{\beta}_{4t}$  em patamares mais altos e  $\hat{\beta}_{3t}$  mais baixo.

A Figura 9 compara a movimentação de  $\hat{\beta}_{1t}$  frente a um *proxy* da inflação de longo prazo, representada pela taxa da BEIR calculada pela ANBIMA para a maturidade de 6,5<sup>10</sup> anos. Já a Figura 10 ilustra a movimentação de  $\hat{\beta}_{2t}$  em relação a uma aproximação para a inclinação da inflação implícita, representada pela diferença entre as taxas da BEIR calculadas pela ANBIMA para as maturidades de 1 e 6,5<sup>11</sup> anos. A inclinação é calculada dessa forma, pois como foi demonstrado anteriormente, o fator de carregamento de  $\hat{\beta}_{2t}$  se aproxima de 1 quanto menor for a maturidade e de 0 quanto maior for a mesma, deste modo  $\hat{\beta}_{2t}$  tem influência mais significativa nos vértices curtos da BEIR.

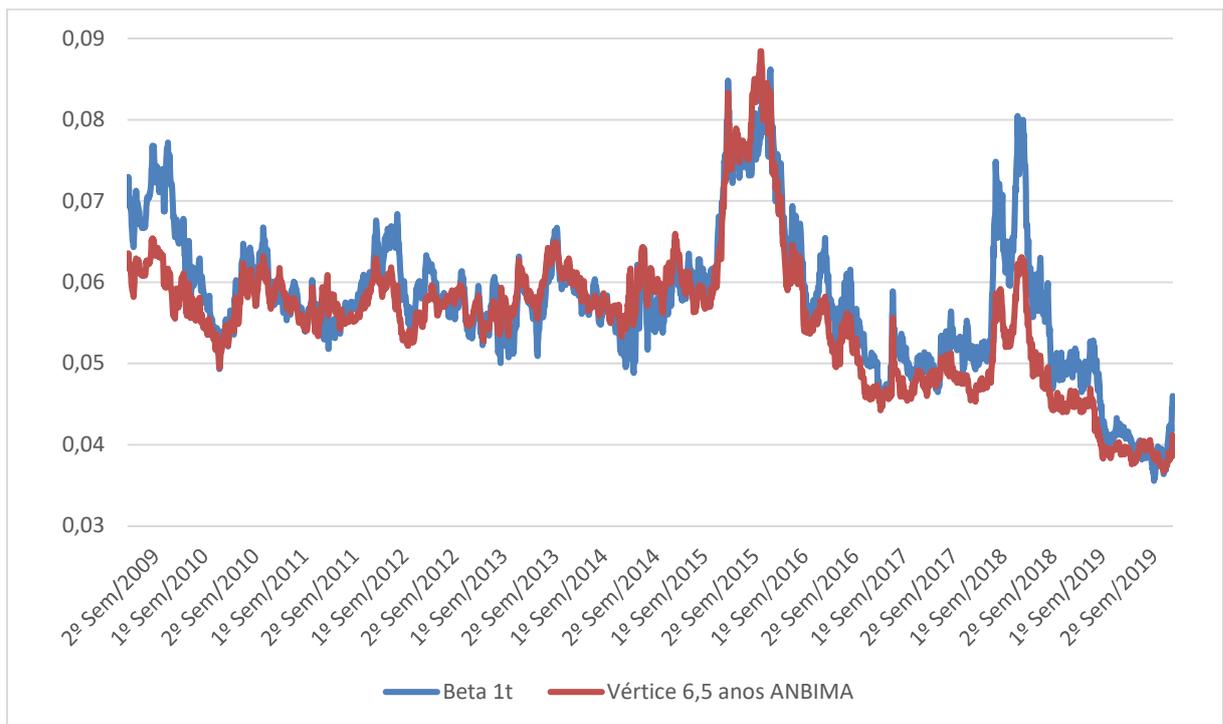


Figura 9 – Comparação  $\hat{\beta}_{1t}$  com *proxy* de Nível da BEIR

Esta figura compara a evolução de  $\hat{\beta}_{1t}$  com o *proxy* de nível da inflação implícita disponibilizada pela ANBIMA representado pelo seu vértice de 6,5 anos.

<sup>10</sup> Foi escolhida essa maturidade por ser a mais longa da inflação implícita que está presente em todas as datas da amostra.

<sup>11</sup> Foram escolhidas essas maturidades, pois sua diferença é a maior presente em todas as datas da amostra.

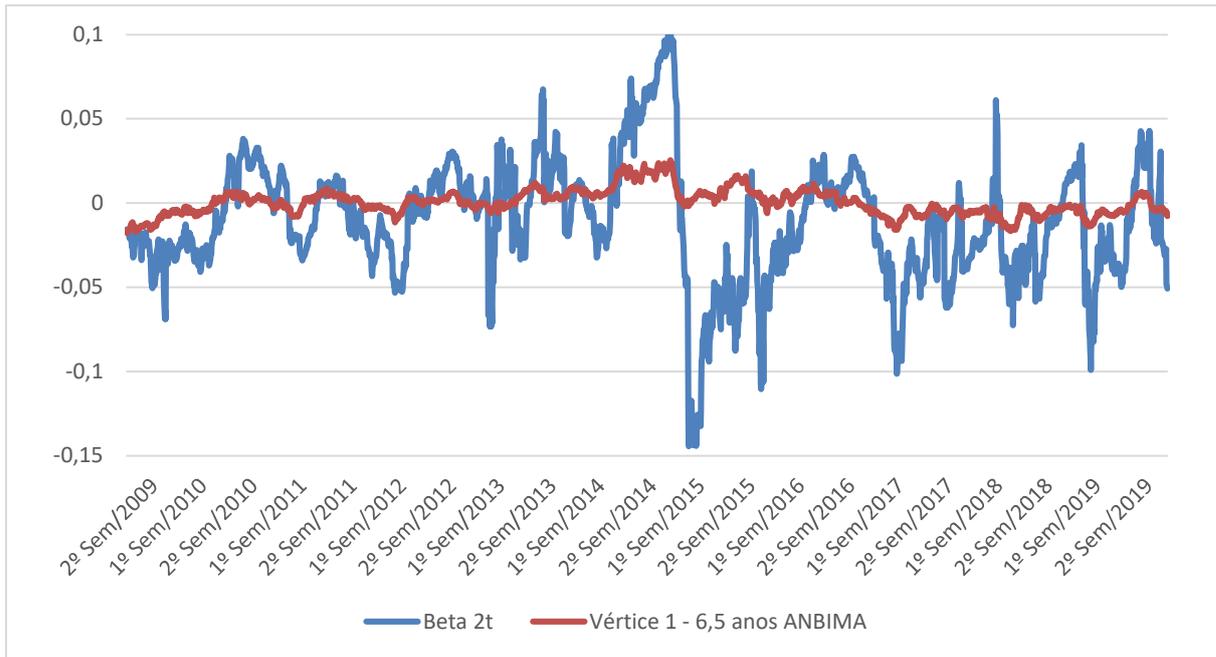


Figura 10 – Comparação  $\hat{\beta}_{2t}$  com *proxy* de Inclinação da BEIR

Esta figura compara a evolução de  $\hat{\beta}_{2t}$  com o *proxy* de inclinação da inflação implícita disponibilizada pela ANBIMA representada pela diferença entre seus vértices de 1 e 6,5 anos.

A Figura 9 denota que a relação de  $\hat{\beta}_{1t}$  com o *proxy* escolhido se mostra extremamente próxima, tendo uma correlação de 90,04%, já a Figura 10 aponta que a relação de  $\hat{\beta}_{2t}$  com o *proxy* escolhido não é tão nítida, apesar de ainda obter uma correlação com valor moderadamente alto de 51,92%. Não foram feitas *proxies* para  $\hat{\beta}_{3t}$  e  $\hat{\beta}_{4t}$ , pois se entendeu que não havia nenhuma aproximação representativa o suficiente de modo que se fosse interessante estudar.

#### 5.4 BEIR x Relatório Focus

Adicionalmente, a Figura 11 compara a série temporal da taxa estimada para a BEIR com prazo de 1 ano obtida através da aplicação do processo citado na seção 4.2, encontrando os betas ótimos, e, então, aplicando o modelo de Svensson (1994) com a série temporal das expectativas de inflação de agentes de mercado para o prazo de 1 ano declarado no Relatório Focus. Fica demonstrada uma relação forte das duas com uma correlação de 90,91%, o que está em conformidade com o encontrado por Vicente e Graminho (2015) que haviam concluído que, no Brasil, a expectativa de inflação é o principal componente da BEIR, já que os outros termos

propostos por eles, como convexidade e prêmio de liquidez, não possuem relevância e que, para horizontes curtos, o prêmio de risco de inflação é pequeno.

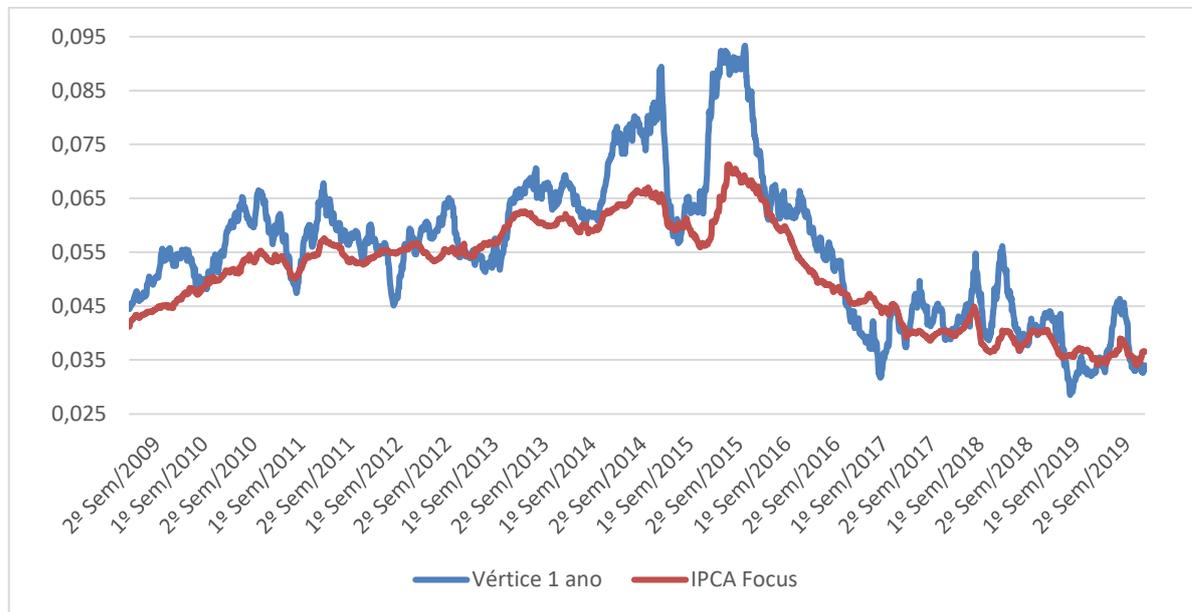


Figura 11 – Comparação do Vértice de 1 ano da BEIR com Relatório Focus

Esta figura compara a evolução dos vértices de 1 ano estimados para a inflação implícita com a previsão do IPCA de 1 ano do Relatório Focus.

## 5.5 Regressões Lineares

As Figuras 12, 13, 14 e 15 apresentam os resultados obtidos das regressões lineares aplicadas para todo o período da amostra, conforme explicado na seção 4. Todas as regressões foram executadas no pacote estatístico Eviews.

A Figura 12 exhibe que todas as variáveis independentes são estatisticamente significativas em todos os níveis de confiança usuais para explicar movimentos da inflação implícita de longo prazo representada por  $\hat{\beta}_{1t}$ . A regressão também apresenta um R-quadrado ajustado de 60,86% o que indica que o modelo de regressão explica com algum êxito a variância dos valores de  $\beta_{1t}$ .

Dependent Variable: BETA1  
 Method: Least Squares  
 Date: 01/05/21 Time: 22:11  
 Sample: 1 546  
 Included observations: 546

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
CAMBIO	-0.010098	0.000773	-13.06121	0.0000
CDS	0.000102	7.44E-06	13.66537	0.0000
CPI	0.454609	0.073808	6.159348	0.0000
CRB	-3.55E-05	8.06E-06	-4.411765	0.0000
IBOV	1.25E-07	3.48E-08	3.594698	0.0004
C	0.072032	0.005038	14.29838	0.0000
R-squared	0.612239	Mean dependent var	0.057716	
Adjusted R-squared	0.608649	S.D. dependent var	0.008740	
S.E. of regression	0.005467	Akaike info criterion	-7.569115	
Sum squared resid	0.016142	Schwarz criterion	-7.521833	
Log likelihood	2072.368	Hannan-Quinn criter.	-7.550632	
F-statistic	170.5224	Durbin-Watson stat	0.276967	
Prob(F-statistic)	0.000000			

Figura 12 – Regressão Linear para  $\hat{\beta}_{1t}$

Esta figura apresenta os resultados para o cálculo da regressão linear de  $\hat{\beta}_{1t}$  em função das variáveis financeiras e macroeconômicas.

A Figura 13 mostra que todas as variáveis independentes são estatisticamente significativas nos níveis de confiança usuais para explicar movimentos da inclinação da inflação implícita representada por  $\hat{\beta}_{2t}$ , com exceção da CRB que não é significativa ao nível de 1%. Chama a atenção o baixo valor do R-quadrado ajustado de 16,71%, o que indica que o modelo de regressão aplicado tem dificuldade de explicar a variância da variável dependente e também o p-valor extremamente alto associado à constante.

Dependent Variable: BETA2  
 Method: Least Squares  
 Date: 01/05/21 Time: 22:22  
 Sample: 1 546  
 Included observations: 546

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
CAMBIO	0.013753	0.004636	2.966723	0.0031
CDS	-0.000241	4.46E-05	-5.401587	0.0000
CPI	3.060052	0.442534	6.914842	0.0000
IBOV	-7.37E-07	2.09E-07	-3.533740	0.0004
CRB	0.000100	4.83E-05	2.074990	0.0385
C	-0.012920	0.030205	-0.427735	0.6690
R-squared	0.174756	Mean dependent var	-0.011201	
Adjusted R-squared	0.167115	S.D. dependent var	0.035919	
S.E. of regression	0.032781	Akaike info criterion	-3.987016	
Sum squared resid	0.580276	Schwarz criterion	-3.939734	
Log likelihood	1094.455	Hannan-Quinn criter.	-3.968533	
F-statistic	22.87035	Durbin-Watson stat	0.213752	
Prob(F-statistic)	0.000000			

Figura 13 – Regressão Linear para  $\hat{\beta}_{2t}$

Esta figura apresenta os resultados para o cálculo da regressão linear de  $\hat{\beta}_{2t}$  em função das variáveis financeiras e macroeconômicas.

A Figura 14 aponta que apenas as variáveis CDS e CPI são estatisticamente significativas nos níveis de confiança usuais para explicar os movimentos da curvatura da inflação implícita representada por  $\hat{\beta}_{3t}$ . O baixo número de variáveis independentes significativas e o R-quadrado ajustado de apenas 18,90% indicam que a variância dos movimentos da curvatura não é plenamente capturada pelas variáveis independentes.

Dependent Variable: BETA3  
 Method: Least Squares  
 Date: 01/05/21 Time: 22:30  
 Sample: 1 546  
 Included observations: 546

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
CAMBIO	0.000760	0.008527	0.089171	0.9290
CPI	-2.465338	0.813997	-3.028681	0.0026
CDS	0.000296	8.20E-05	3.603942	0.0003
CRB	-0.000123	8.89E-05	-1.384887	0.1667
IBOV	-2.75E-07	3.84E-07	-0.717897	0.4731
C	0.061520	0.055559	1.107291	0.2687
R-squared	0.196441	Mean dependent var	0.035932	
Adjusted R-squared	0.189001	S.D. dependent var	0.066956	
S.E. of regression	0.060297	Akaike info criterion	-2.768136	
Sum squared resid	1.963303	Schwarz criterion	-2.720854	
Log likelihood	761.7010	Hannan-Quinn criter.	-2.749653	
F-statistic	26.40214	Durbin-Watson stat	0.300556	
Prob(F-statistic)	0.000000			

Figura 14 – Regressão Linear para  $\hat{\beta}_{3t}$

Esta figura apresenta os resultados para o cálculo da regressão linear de  $\hat{\beta}_{3t}$  em função das variáveis financeiras e macroeconômicas.

A Figura 15 expõe que todas as variáveis independentes, com exceção do CPI, são estatisticamente significativas nos níveis de confiança usuais, menos o Câmbio e o IBOV que não o são ao nível de 1%, para explicar os movimentos da curvatura da inflação implícita, representada por  $\hat{\beta}_{4t}$ . Entretanto, apesar de muitas das variáveis serem significativas o R-quadrado ajustado segue bastante baixo no valor de 13,03%, denotando que as variáveis independentes apresentam dificuldade em explicar a variância da variável dependente.

Dependent Variable: BETA4  
 Method: Least Squares  
 Date: 01/05/21 Time: 22:46  
 Sample: 1 546  
 Included observations: 546

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
CAMBIO	0.010297	0.004663	2.208257	0.0276
CDS	-0.000159	4.48E-05	-3.549906	0.0004
CPI	0.676501	0.445147	1.519727	0.1292
CRB	0.000205	4.86E-05	4.224286	0.0000
IBOV	-4.96E-07	2.10E-07	-2.361552	0.0186
C	-0.088591	0.030383	-2.915773	0.0037
R-squared	0.138294	Mean dependent var	-0.028028	
Adjusted R-squared	0.130315	S.D. dependent var	0.035359	
S.E. of regression	0.032974	Akaike info criterion	-3.975243	
Sum squared resid	0.587148	Schwarz criterion	-3.927961	
Log likelihood	1091.241	Hannan-Quinn criter.	-3.956760	
F-statistic	17.33273	Durbin-Watson stat	0.297549	
Prob(F-statistic)	0.000000			

Figura 15 – Regressão Linear para  $\hat{\beta}_{4t}$

Esta figura apresenta os resultados para o cálculo da regressão linear de  $\hat{\beta}_{4t}$  em função das variáveis financeiras e macroeconômicas.

## 5.6 Projeção *Out-of-Sample*

Seguindo com o processo descrito na seção 4, foram calculados  $\lambda_{1,2015}$  e  $\lambda_{2,2015}$ , isto é, os lambdas ótimos utilizando apenas os dados até o final de 2015 e, a partir destes, encontrou-se os novos betas ótimos sem que os lambdas contivessem informações de anos posteriores a 2015. As Tabelas 11 e 12 abaixo apresentam, respectivamente, os valores de  $\lambda_{1,2015}$  e  $\lambda_{2,2015}$  ótimos e seu REQM e as estatísticas descritivas dos betas.

Tabela 11 – Valores de  $\lambda_{1,2015}$  e  $\lambda_{2,2015}$  ótimos e seu REQM

	$\lambda_{1,2015}$	$\lambda_{2,2015}$	REQM
<b>VALORES</b>	1,94	0,70	2,56E-04

Esta tabela apresenta os lambdas ótimos calculados com os dados limitados até o fim de 2015 e a raiz do erro quadrático médio que as taxas geradas usando as equações (4), (5) e (6) a partir deles obtém frente as disponibilizadas pela ANBIMA.

Tabela 12 – Estatísticas Descritivas dos Betas para os Lambdas Ótimos com dados até 2015

PARÂMETROS	MÉDIA	MEDIANA	DESVIO PADRÃO	MÁXIMO	MÍNIMO
$\hat{\beta}_{1t,2015}$	0,0584	0,0578	0,0091	0,0872	0,0346
$\hat{\beta}_{2t,2015}$	-0,0085	-0,0097	0,0347	0,1042	-0,1372
$\hat{\beta}_{3t,2015}$	0,0159	0,0101	0,0504	0,2417	-0,1497
$\hat{\beta}_{4t,2015}$	-0,0166	-0,0144	0,0203	0,0402	-0,0967

Esta tabela apresenta as estatísticas descritivas dos betas resultantes da equação (4) usando os lambdas ótimos da Tabela 11 e as taxas da inflação implícita da ANBIMA.

Comparando-se as Tabelas 9 e 11, o primeiro que se nota são variações de 0,13 e -0,32 para os  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  originais representando alterações nos pontos onde as curvaturas da inflação implícita atingem seus máximos acompanhado de uma subida leve do REQM de aproximadamente 2,48 *basis points* para 2,56 *basis points*. Quanto às Tabelas 10 e 12 se nota que a BEIR mediana de longo prazo praticamente se manteve a mesma indo de 5,74% para 5,78%, já a inclinação mediana teve uma alteração aumentando seu valor, causando que a BEIR esperada de curto prazo fosse um pouco maior na casa dos 4,81%. As maiores alterações, contudo, são vistas nas estimativas medianas de  $\hat{\beta}_{3t}$  e  $\hat{\beta}_{4t}$  que variaram em aproximadamente 67% e 41%, respectivamente, denotando alterações expressivas nas curvaturas.

Continuando o trabalho fez-se a projeção *out-of-sample* e foram calculados três tipos de  $REQM_{projeção}^i$  para cada iteração da projeção, o  $REQM_{projeção}^i$ , o  $REQM_{projeçãoocp}^i$  e o  $REQM_{projeçãoolp}^i$  conforme equações (6), (7) e (8), respectivamente. Encontrou-se que o  $REQM_{projeçãoocp}^i$  é maior do que o  $REQM_{projeção}^i$  em 81,28% das projeções enquanto que  $REQM_{projeçãoolp}^i$  só é superior nos 18,72% restantes, indicando que o modelo tem maior capacidade de previsão para a BEIR de longo prazo. A Figura 16 plota o gráfico destes três elementos para as 219 iterações da projeção e ilustra bem que o  $REQM_{projeçãoocp}^i$  apresenta valores superiores na maior parte das observações.

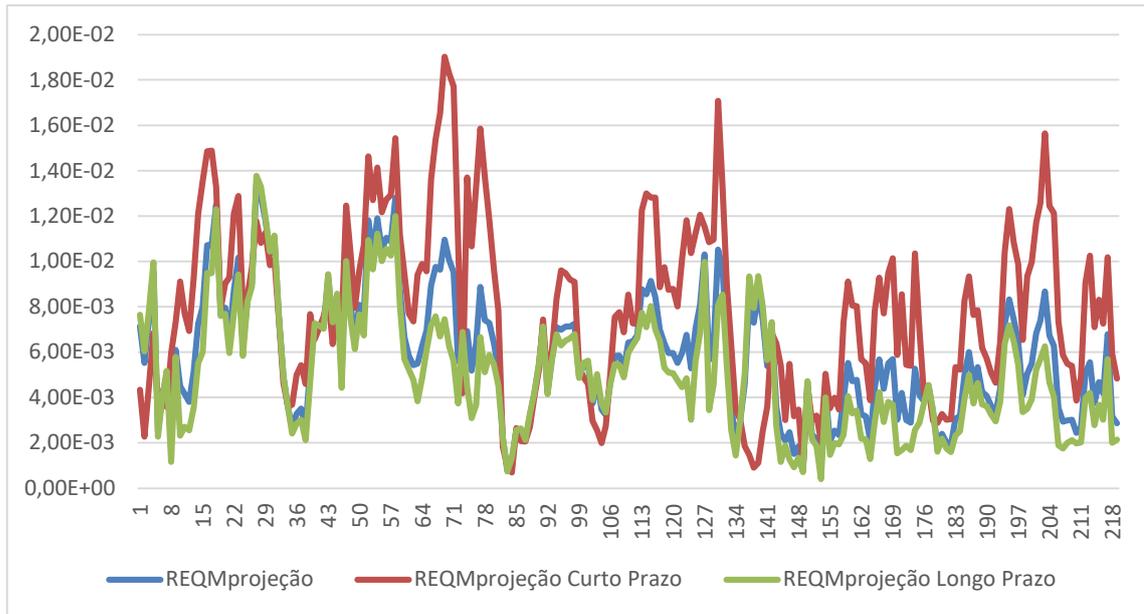


Figura 16 – Valores de  $REQM_{projecção}^i$ , o  $REQM_{projecçãocp}^i$  e o  $REQM_{projecçãolp}^i$

Esta tabela compara os valores das raízes do erro quadrático médio geral, de curto prazo e de longo prazo da projeção *out-of-sample*.

O resultado encontrado de o  $REQM_{projecçãocp}^i$  ser consistentemente superior ao  $REQM_{projecçãolp}^i$  parece ser condizente com os resultados das regressões obtidas anteriormente, uma vez que o R-quadrado ajustado na regressão de  $\hat{\beta}_{1t}$  era sensivelmente maior do que dos outros betas. Além disso, é possível que essa diferença seja causada pela metodologia adotada para estimar a BEIR uma vez que não foram feitos ajustes para a sazonalidade e para a defasagem dos títulos indexados à inflação vis-à-vis os títulos prefixados que, como Val e Araújo (2019) demonstraram, são relevantes para as expectativas de inflação de curto prazo.

### 5.7 Maior $REQM_{projecção}^i$ x Menor $REQM_{projecção}^i$

De maneira a ilustrar a variação do  $REQM_{projecção}^i$  ao longo do período projetado, selecionaram-se as datas com o maior e o menor  $REQM_{projecção}^i$  da projeção para se plotar os gráficos comparando o que foi projetado com os dados da BEIR obtidos diretamente da ANBIMA, representadas, respectivamente, nas Figuras 17 e 18. A iteração com o maior valor foi a 27, isto é, a  $REQM_{projecção}^{27}$  que é correspondente a data de 04 de Julho de 2016 e a com o

menor valor foi a 149, isto é, a  $REQM_{projecção}^{189}$  correspondente a data de 05 de Novembro de 2018.

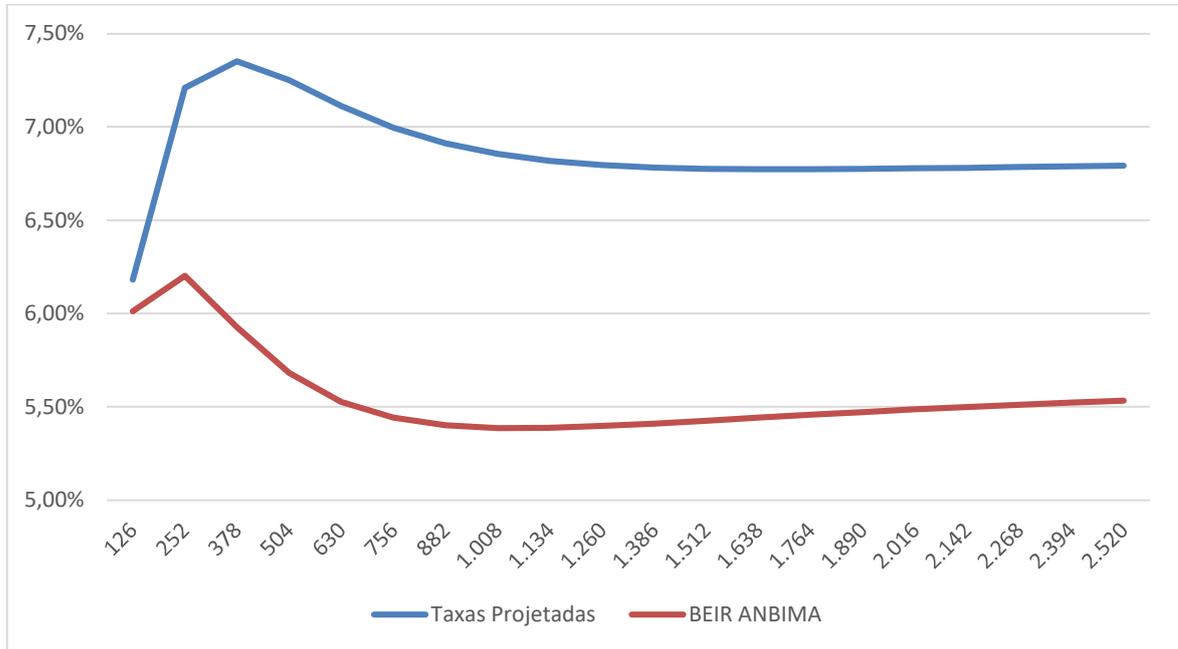


Figura 17 – Curvas para data do  $REQM_{projecção}^{27}$

Essa figura compara os valores projetados pelo modelo calculado a partir das regressões lineares com as taxas da inflação implícita da ANBIMA para a data de maior  $REQM_{projecção}^i$ .

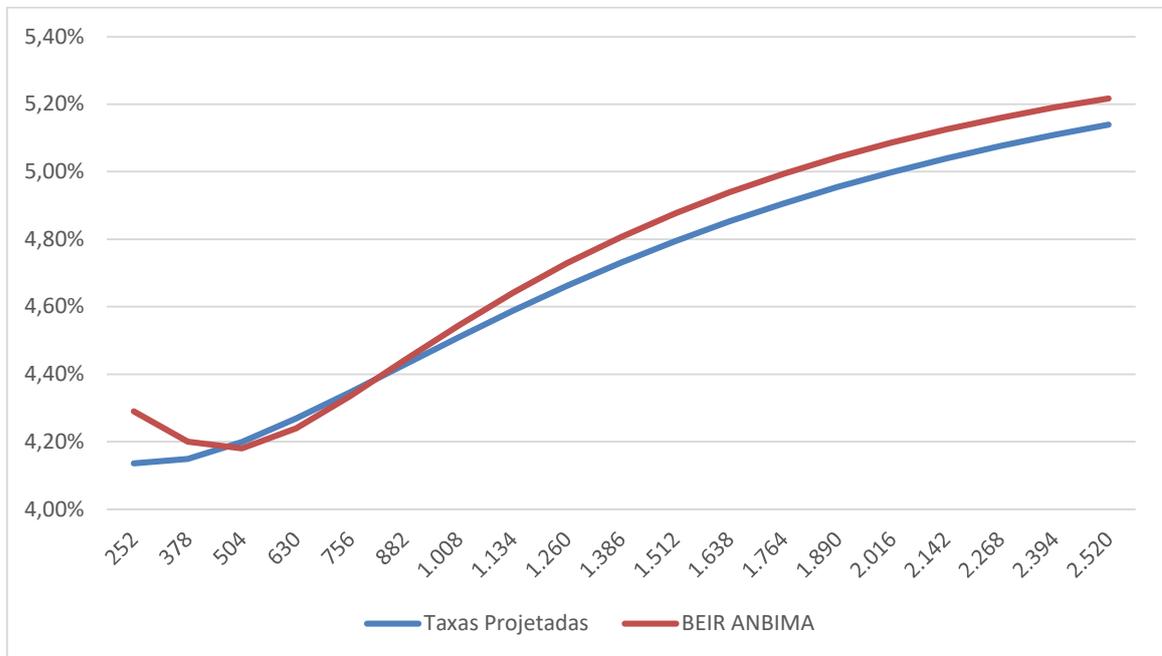


Figura 18 – Curvas para data do  $REQM_{projecção}^{189}$

Essa figura compara os valores projetados pelo modelo calculado a partir das regressões lineares com as taxas da inflação implícita da ANBIMA para a data de menor  $REQM_{projecção}^i$ .

Analisando os dois gráficos conjuntamente, a diferença fica nítida entre os dois casos, com a Figura 17 exibindo duas curvas quase que paralelas, mas separadas por um *shift* de aproximadamente 130 *basis points*, o que é condizente com o  $REQM_{projecção}^{27}$  de 1,34E-02 atrelado a esta iteração da projeção e a Figura 18 duas curvas que se cruzam e cuja diferença máxima chega a 15 *basis points* no vértice mais curto, mas ao longo da curva se fixa em um patamar inferior a 10 *basis points*, o que, novamente, está em sintonia com o  $REQM_{projecção}^{189}$  de 7,48E-04 associado a essa iteração.

### 5.8 Passeio Aleatório e Teste de Diebold e Mariano (1995)

O trabalho prosseguiu comparando a acurácia das projeções feitas pelo modelo obtido através da regressão linear com um *Random Walk*, conforme apresentado na seção 4. A Figura 19 plota os valores do  $REQM_{projecção}^i$  para cada iteração da projeção e os compara com o  $REQM_{RW}^i$  gerado para cada passo pelo *Random Walk*, o gráfico demonstra que o  $REQM_{projecção}^i$  aparenta ser consistentemente inferior com apenas 19,63%, ou 43 de 219, de suas observações sendo superiores àquelas geradas pelo *Random Walk*.

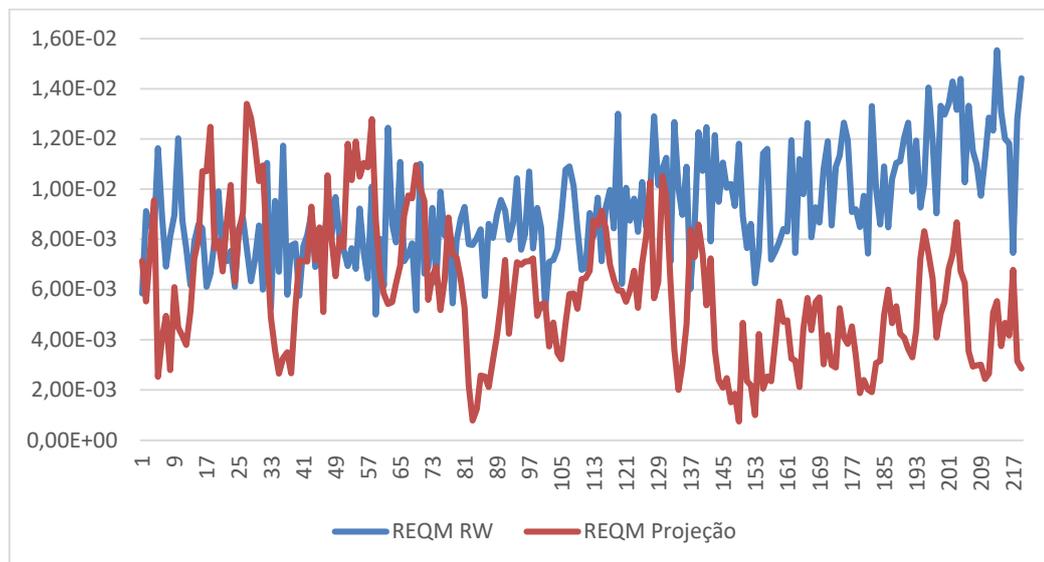


Figura 19 – Valores de  $REQM_{projecção}^i$  e  $REQM_{RW}^i$

Essa figura apresenta a comparação entre as raízes de erro quadrático médio de cada iteração para a projeção *out-of-sample* e para um passeio aleatório.

Finalmente, executou-se o teste de Diebold e Mariano (1995) com perda quadrática e 5% de nível de significância para determinar se as diferenças de performance do modelo apresentado e o *Random Walk* são estatisticamente significativos. O teste será aplicado para cada um dos 21 vértices projetados e, dado o nível de significância de 5%, se a estatística de teste não ficar entre -1,96 e 1,96, há evidências para rejeitar a hipótese nula de que os dois métodos de previsão têm a mesma acurácia e aceitar a hipótese alternativa, no nosso caso, de que o modelo feito a partir das regressões lineares tem uma acurácia maior do que o *Random Walk*. A Tabela 13 exibe a estatística de teste encontrada para cada um dos vértices, o p-valor associado a essa estatística de teste e a conclusão entre rejeitar ou aceitar a hipótese nula considerando nível de significância de 5%.

Tabela 13 – Resultados do Teste Diebold e Mariano (1995)

VÉRTICE	ESTATÍSTICA DE TESTE	P-VALOR	CONCLUSÃO
126	-3,8472	5,973e-05	Rejeitar $H_0$
252	-4,7185	8,697e-07	Rejeitar $H_0$
378	-4,6307	1,822e-06	Rejeitar $H_0$
504	-5,025	2,518e-07	Rejeitar $H_0$
630	-5,0884	1,806e-07	Rejeitar $H_0$
756	-5,7396	4,745e-09	Rejeitar $H_0$
882	-5,1058	1,647e-07	Rejeitar $H_0$
1008	-5,7392	4,756e-09	Rejeitar $H_0$
1134	-5,3951	3,424e-08	Rejeitar $H_0$
1260	-5,5499	1,429e-08	Rejeitar $H_0$
1386	-5,4327	2,775e-08	Rejeitar $H_0$

VÉRTICE	ESTATÍSTICA DE TESTE	P-VALOR	CONCLUSÃO
1512	-6,0796	6,023e-10	Rejeitar $H_0$
1638	-5,5132	1,762e-08	Rejeitar $H_0$
1764	-6,3383	1,162e-10	Rejeitar $H_0$
1890	-7,2466	2,137e-13	Rejeitar $H_0$
2016	-6,1406	4,111e-10	Rejeitar $H_0$
2142	-6,5241	3,421e-11	Rejeitar $H_0$
2268	-2,0441	0,02047	Rejeitar $H_0$
2394	-1,8016	0,0358	Aceitar $H_0$
2520	-1,7757	0,03789	Aceitar $H_0$
2646	-1,7957	0,03627	Aceitar $H_0$

Essa tabela apresenta os resultados do teste de Diebold e Mariano (1995) para cada um dos vinte e um vértices projetados.

A Tabela mostra que para 18 dos 21 vértices projetados, a nível de significância de 5%, se rejeita a hipótese nula de que ambos os modelos teriam a mesma acurácia de previsão dando fortes indícios que o modelo calculado nesse trabalho teria maior sucesso em fazer previsões para a BEIR futura do que um *Random Walk*. É válido ressaltar que nos outros níveis usuais de significância, 1% e 10%, teríamos, respectivamente, 17 e 21 dos vértices projetados rejeitando a hipótese nula.

## 6. Conclusão

Este trabalho teve como objetivo estudar a estrutura a termo da BEIR, seu comportamento ao longo do tempo e comparar as taxas da BEIR frente às expectativas de inflação reportadas no Relatório Focus. Além disso, foram feitas regressões lineares com o intuito de analisar se os fatores de nível, inclinação e curvatura que definem a BEIR guardam relação com variáveis macroeconômicas e financeiras selecionadas, como a taxa de câmbio, o CDS do Brasil, o índice de *commodity* CRB, o índice Bovespa, a variação do CPI. Finalmente, é feita uma análise para averiguar se o modelo baseado nas variáveis listadas acima possui uma capacidade de projeção mais eficaz que um passeio aleatório.

A análise mostra que a BEIR, no início da amostra, apresentava uma forma com pequenas alterações, uma vez que os fatores de nível, inclinação e curvatura, representados por  $\hat{\beta}_{1t}$ ,  $\hat{\beta}_{2t}$ ,  $\hat{\beta}_{3t}$  e  $\hat{\beta}_{4t}$ , variavam, sem se distanciar muito, em torno de determinados valores, até que ocorreu um choque relevante a partir do final de 2014, que continuou ao longo de 2015, que os alterou de forma acentuada por aproximadamente um ano. Já, a partir de 2016, se vê um movimento de estabilização dos fatores da BEIR em valores levemente diferentes dos de antes da ruptura conjugados com um aumento em sua variabilidade.

Adicionalmente, se comparou a movimentação de  $\hat{\beta}_{1t}$  e  $\hat{\beta}_{2t}$  frente a *proxies* da inflação de longo prazo e da inclinação da inflação implícita representados pela maturidade de 6,5 anos e pela diferença entre as maturidades de 1 e 6,5 anos das taxas da BEIR calculadas pela ANBIMA. Encontrou-se uma alta correlação de 90,04% para  $\hat{\beta}_{1t}$  e uma média correlação de 51,92% para  $\hat{\beta}_{2t}$ , mostrando que as interpretações desses betas como o nível e a inclinação da BEIR são coerentes com os resultados práticos. Não foram feitas *proxies* para  $\hat{\beta}_{3t}$  e  $\hat{\beta}_{4t}$ , pois se entendeu que não havia nenhuma aproximação representativa o suficiente de modo que se fosse interessante estudar.

A comparação das expectativas de inflação do Relatório Focus para os próximos 12 meses com as taxas estimadas pelo modelo de Svensson (1994) para a BEIR com prazo de 1 ano comprovou uma forte relação entre os dois com uma correlação de 90,91%, o que vai ao encontro da literatura a respeito do tema que concluiu que, no Brasil, a expectativa de inflação é o principal componente da BEIR, em especial para horizontes curtos.

As regressões lineares aplicadas concluíram que todas as variáveis independentes, isto é, taxa de câmbio, CDS, CRB, IBOV e CPI eram estatisticamente significativas para explicar os movimentos da inflação implícita de longo prazo e sua inclinação, representados por  $\hat{\beta}_{1t}$  e  $\hat{\beta}_{2t}$ , entretanto os R-quadrados ajustados de, respectivamente, 60,86% e 16,71% indicam que os modelos encontrados possuem significativa diferença na capacidade de explicar a variância dos dados, sendo o modelo para  $\hat{\beta}_{1t}$  notadamente mais eficaz.

As regressões lineares de  $\hat{\beta}_{3t}$  e  $\hat{\beta}_{4t}$  encontraram que para o primeiro apenas as variáveis CDS e CPI eram estatisticamente significativas, enquanto que para o segundo todas, com exceção da CPI, o eram. Todavia os R-quadrados ajustados de, respectivamente, 18,90% e 13,03% denotam que não há muita diferença entre os modelos na capacidade de representar a variância dos betas.

A projeção *out-of-sample* encontrou lambdas ótimos utilizando apenas os dados até o final de 2015, com variações de 0,13 e -0,32 em relação aos  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  originais que utilizaram os dados de toda a amostra e os betas ótimos associados a esses novos lambdas apresentaram uma certa estabilidade para o nível, um aumento para a inclinação e alterações significativas nas suas curvaturas em relação aos  $\hat{\beta}_{1t}$ ,  $\hat{\beta}_{2t}$ ,  $\hat{\beta}_{3t}$  e  $\hat{\beta}_{4t}$  calculados a partir da amostra completa.

O cálculo do  $REQM_{projeção}^i$ , o  $REQM_{projeçãoocp}^i$  e o  $REQM_{projeçãoolp}^i$  para cada iteração da projeção achou que o  $REQM_{projeçãoocp}^i$  é maior do que o  $REQM_{projeção}^i$  em 81,28% das iterações da projeção, enquanto o  $REQM_{projeçãoolp}^i$  só é superior nas 18,72% restantes, indicando que o modelo tem maior capacidade de previsão para a BEIR de longo prazo. O resultado encontrado parece ser condizente com os resultados das regressões obtidas anteriormente, uma vez que o R-quadrado ajustado na regressão de  $\hat{\beta}_{1t}$  era sensivelmente maior do que dos outros betas. Além disso, é existe a possibilidade que a diferença seja causada pela metodologia adotada para estimar a BEIR uma vez que não foram feitos ajustes para a sazonalidade e para a defasagem dos títulos indexados à inflação vis-à-vis os títulos prefixados que, como Val e Araújo (2019) demonstraram, são relevantes para as expectativas de inflação de curto prazo.

A comparação entre o modelo obtido a partir das regressões lineares e do *Random Walk* mostra que o  $REQM_{projeção}^i$  aparenta ser consistentemente inferior com apenas 19,63%, ou em 43 das 219 iterações, de suas observações sendo superiores àquelas geradas pelo passeio aleatório. Para confirmar a superioridade de um modelo sobre o outro executou-se o teste de

Diebold e Mariano (1995) com perda quadrática e 5% de nível de significância que demonstrou que para 18 dos 21 vértices projetados se rejeita a hipótese nula de que ambos os modelos teriam a mesma acurácia de previsão, dando fortes indícios que o modelo calculado nesse trabalho teria maior sucesso em fazer previsões para a BEIR futura do que um *Random Walk*. Ressalta-se, também, que nos outros níveis usuais de significância, 1% e 10%, teríamos, respectivamente, 17 e 21 dos vértices projetados rejeitando a hipótese nula.

## Referências Bibliográficas

Araujo, G. S., & Vicente, J. V. M. (2017). Estimação da Inflação Implícita de Curto Prazo. *Revista Brasileira de Finanças*, 15(2), 227-250.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DAS ENTIDADES DOS MERCADOS FINANCEIROS E DE CAPITAIS. Estrutura a Termo das Taxas de Juros Estimada. Disponível, para associados da ANBIMA, em: <http://www.anbima.associados.rtm/debentures/taxas/d-taxas.asp>.

BANCO CENTRAL DO BRASIL. *Expectativas de mercado*. Disponível em: <https://www.bcb.gov.br/controleinflacao/expectativasmercado>.

BANCO CENTRAL DO BRASIL. *Focus - Relatório de Mercado*. Disponível em: <https://www.bcb.gov.br/publicacoes/focus>.

Bernanke, Ben. (2004). What policymakers can learn from asset prices. Discurso perante a The Investment Analyst Society of Chicago, IL. Disponível em [www.federalreserve.gov/boarddocs/speeches/2004/20040415/](http://www.federalreserve.gov/boarddocs/speeches/2004/20040415/).

Bernanke, Ben. (2007). Inflation Expectations and Inflation Forecasting. Discurso perante a Monetary Economics Workshop of the National Bureau of Economic Research Summer Institute, Cambridge, Massachusetts. Disponível em <https://www.federalreserve.gov/newsevents/speech/bernanke20070710a.htm>

Caldeira, J. F., & Furlani, L. G. (2013). Inflação implícita e o prêmio pelo risco: uma alternativa aos modelos VAR na previsão para o IPCA. *Estudos Econômicos (São Paulo)*, 43(4), 627-645.

Carriero, A., Kapetanios, G., & Marcellino, M. (2012). Forecasting government bond yields with large Bayesian vector autoregressions. *Journal of Banking & Finance*, 36(7), 2026-2047.

de Freitas Val, F., & Araujo, G. S. (2019). Breakeven Inflation Rate Estimation: an alternative approach considering indexation lag and seasonality. Banco Central do Brasil.

Diebold, F. X., & Li, C. (2006). Forecasting the term structure of government bond yields. *Journal of econometrics*, 130(2), 337-364.

- Diebold, F. M., & Mariano, R. (1995). R.(1995). Comparing predictive accuracy. *Journal of Business & economic statistics*, 20(1).
- Fernandes, M., & Thiele, E. (2015). The macroeconomic determinants of the term structure of inflation expectations in Brazil.
- Goldfajn, I., & Werlang, S. R. D. C. (2000). The pass-through from depreciation to inflation: a panel study. *Werlang, Sergio R., The Pass-Through from Depreciation to Inflation: A Panel Study (July 2000). Banco Central de Brasil Working Paper*, (5).
- Huse, C. (2011). Term structure modelling with observable state variables. *Journal of Banking & Finance*, 35(12), 3240-3252.
- Kadobayashi, T. Y. (2018). *Análise dos determinantes macroeconômicos da relação entre inflação implícita e prêmio de inflação no Brasil* (Dissertação de Mestrado).
- Litterman, R., & Scheinkman, J. (1991). Common factors affecting bond returns. *Journal of fixed income*, 1(1), 54-61.
- Nelson, C. R., & Siegel, A. F. (1987). Parsimonious modeling of yield curves. *Journal of business*, 473-489.
- Nunes, C. V., Doi, J., & Fernandes, M. (2017). Disagreement in inflation forecasts and inflation risk premia in Brazil. *Brazilian Review of Econometrics*, 37(1), 45-59.
- Rochman, R. R., & Hatisuka, E. U. (2012, May). Títulos Públicos Indexados à Inflação e a Ancoragem das Expectativas no Brasil. In *XII Encontro Brasileiro de Finanças*.
- Söderlind, P. (2010). Inflation risk premia and survey evidence on macroeconomic uncertainty. *International Journal of Central Banking*, forthcoming.
- Svensson, L. E. O. (1994). Estimating and Interpreting Forward Interest Rates: Sweden 1992-1994. National Bureau of Economic Research. NBER Working Paper Series 4871.
- Val, F., Barbedo, C., & Maia, M. (2010). *Expectativas Inflacionárias e Inflação Implícita no Mercado Brasileiro* (No. 225). Central Bank of Brazil, Research Department.

Vicente, J. V. M., & Graminho, F. M. (2015). Decompondo a inflação implícita. *Revista Brasileira de Economia*, 69(2), 263-284.

Vicente, J. V. M., & Guillen, O. T. D. C. (2013). Do inflation-linked bonds contain information about future inflation?. *Revista Brasileira de Economia*, 67(2), 251-260.

Weber, M. (2011). *Inflação futura: uma análise comparativa entre as expectativas do focus e as inflações implícitas nos títulos públicos* (Dissertação de Mestrado).