

Resumo

A medida de risco mais difundida e utilizada é o *Value at Risk* (VaR), que ganhou popularidade após 1994 com a metodologia *RiskMetrics* e sua adoção pelos acordos de Basileia. Este trabalho é fruto de estudos internos no BNDES e de discussões com atores da gestão de risco que utilizam essa métrica. Diversos modelos clássicos foram revisitados a fim de selecionar e validar os melhores modelos utilizando testes de aderência e critérios diversos que levam em conta não somente a eficiência estatística, mas também a questão gerencial. Um modelo estatisticamente eficiente de VaR pode levar a um aumento de capital regulatório, dificuldades de implementação e outros obstáculos que o gestor de risco pode vir a encarar. Além da discussão sobre os modelos em si, este estudo se aprofunda nos impactos da alteração de seus parâmetros, que devem ser revisitados periodicamente pelas instituições.

Palavras-chave: *Value at Risk*. Gestão de risco. Risco de mercado. Seleção e validação de modelos de VaR.

Abstract

The most widespread and used risk measure is Value at Risk (VaR), which gained popularity after 1994 with the RiskMetrics methodology and adoption by the Basel accords. This paper results from internal studies at BNDES and debates with risk management actors who use this risk metric. Several classic models were revisited to select and validate the best models, using adherence tests and other several criteria that consider both the statistics and management issues. A statistically efficient VaR model can lead to increased regulatory capital, implementation difficulties and other barriers that risk managers may face. Moreover, this study provides an in-depth look into the impacts of changing their parameters, which should be periodically revisited by Institutions.

Keywords: *Value at Risk*. Risk management. Market risk. Selection and validation of VaR models.

Introdução

Define-se como risco de mercado as perdas decorrentes das oscilações de preços de ações, moedas, juros, índice de preços e *commodities*. Um dos desafios referentes à gestão de risco de mercado de instrumentos financeiros é como mensurar essa perda considerando as inúmeras incertezas quanto ao comportamento do mercado.

Na literatura, existem medidas de risco amplamente estudadas e utilizadas, como a volatilidade, testes de estresse, o *Value at Risk* (VaR) e o *Conditional Value at Risk* (CVaR). Cada medida apresenta vantagens e desvantagens no que se refere a aspectos como a facilidade de implementação, a possibilidade de se realizar testes de aderência e a verificação de propriedades estatísticas e matemáticas desejadas.

O Sistema BNDES, em linha com outras instituições financeiras do Brasil, utiliza o VaR como um dos indicadores para monitorar o risco de suas carteiras de instrumentos financeiros.

O VaR é definido como a perda máxima de um ativo e/ou de uma carteira dentro de uma probabilidade associada para um certo horizonte de tempo, chamado de *holding period* (HP). Ele representa, portanto, uma perda futura esperada do ativo/carteira. No Sistema BNDES, é utilizada atualmente uma probabilidade de 99% de confiança para um HP de um dia útil. Em outras palavras, o VaR de um ativo do BNDES representa hoje a perda financeira máxima, em reais, estimada para esse ativo em um dia útil com 99% de confiança. Nessa linha, estima-se que exista 1% de chance de a perda desse ativo ultrapassar o valor do VaR.

Diariamente, o BNDES calcula o VaR de suas carteiras de instrumentos financeiros e compara com limites estabelecidos para cada carteira para fins de monitoramento de risco de mercado. Nesse sentido, faz-se necessário verificar periodicamente se a medição está sendo realizada a contento, considerando o comportamento do mercado e a estrutura de carteiras analisada.

Há diversas metodologias para cálculo do VaR, tanto paramétricos e semiparamétricos (em que são feitas suposições sobre a distribuição de probabilidade dos retornos das variáveis de mercado) quanto não paramétricos (em que não são feitas suposições sobre as distribuições de probabilidade). Periodicamente, é necessário realizar uma série de análises sobre as metodologias de VaR e seus parâmetros adotados. Uma das formas de se avaliar a metodologia de risco utilizada é realizando *backtests* (ou testes de aderência), que, de forma geral, significam comparações dos valores gerados pelo modelo com perdas/ganhos passados.

Nesse contexto, o objetivo deste estudo é examinar alguns modelos clássicos de VaR,¹ discutir o impacto de seus principais parâmetros e refletir sobre o *tradeoff* entre a eficiência estatística do modelo e o desempenho gerencial.

O estudo está apresentado da seguinte forma: além desta introdução, a segunda seção apresenta conceitos sobre retorno das carteiras (PnL), modelos clássicos de VaR e modelos de estimação de volatilidade. Na terceira seção são apresentados e discutidos os resultados encontrados e, por fim, na quarta seção são tecidas as considerações finais deste estudo.

¹ Utilizou-se a linguagem de programação *Python*, versão 3.8.5, disponível em <http://www.python.org>.

Cálculo do PnL das carteiras

Segundo Circular 3.646 do Banco Central do Brasil (BCB), de 4 de março de 2013, os *backtests* das carteiras que compõem o modelo interno de risco de mercado para obtenção do capital regulatório² devem ser realizados com retornos/resultados hipotéticos e efetivos das carteiras.

Nessa circular, o resultado hipotético é definido como aquele que “corresponde à aplicação das variações de preços de mercado de um dia à carteira do final do dia útil anterior” (BRASIL, 2013, p. 6). Assim, somente os preços de mercado/fatores de risco devem variar utilizando a composição da carteira do dia útil anterior para fins de cálculo.

Em contrapartida, o resultado efetivo é definido como aquele que “corresponde à variação do valor da carteira até o final do dia, incluídas as operações intradia e desconsiderados os valores não relacionados às variações de preços de mercado, tais como tarifas, corretagens e comissões” (BRASIL, 2013, p. 6). Portanto, o resultado efetivo considera não somente as variações dos fatores de risco diários, mas também da composição da carteira.

O retorno da carteira em função dos fatores de risco (PnL_t em R\$) é obtido pelo produto vetorial entre o vetor transposto das exposições por fator de risco na data anterior pelo retorno dos fatores de risco. De forma equivalente, o retorno da carteira em relação ao total de exposições (pnl_t) pode ser obtido utilizando o peso de cada exposição em relação ao total ($w_{i,t-1}^T$).

² Capital regulatório é o valor do capital de risco que um banco estima, dadas orientação e regras regulatórias, para permanecer solvente em um determinado nível de confiança e horizonte temporal.

$$PnL_t = \sum_{i=1}^N Exp_{i,t-1}^T \times r_{i,t}$$

$$pnl_t = \sum_{i=1}^N w_{i,t-1}^T \times r_{i,t}$$

Caso a carteira contenha ativos com fatores de risco não lineares, Haugh (2016) e Alexander (2008) apresentam alternativas para captura de outros riscos.

Conforme Alexander (2008), a validação do modelo de VaR deve ser realizada com carteira de composição fixa para obtenção da série de perdas e ganhos (*profit and loss* – PnL ou P&L). Logo, a avaliação depende apenas da distribuição dos retornos dos fatores de risco. Um mesmo modelo de VaR pode ser aprovado para uma carteira, mas não para outra, ainda que elas contenham os mesmos fatores de risco.

Modelos de VaR

O cálculo do VaR está ligado ao quantil (α) referente à série de perdas e ganhos ou simplesmente distribuição de perdas (PnL), sendo:

$$P(PnL_t < VaR_{t,\alpha}) = \alpha$$

Conforme suposições sobre a distribuição das perdas da carteira, os modelos de VaR podem ser classificados em: paramétricos, não paramétricos e semiparamétricos.

Modelos paramétricos

Modelo gaussiano ou normal

Esse modelo pressupõe que a distribuição dos retornos segue uma distribuição normal ou gaussiana.

$$P(PnL_t < VaR_{t,\alpha}) = P\left(\frac{PnL_t - \mu}{\sigma} < \frac{VaR_{t,\alpha} - \mu}{\sigma}\right) = P\left(z < \frac{VaR_{t,\alpha} - \mu}{\sigma}\right) = \alpha$$

Como a distribuição normal é definida por $P(z < \Phi^{-1}(\alpha))$, então:

$$\frac{VaR_{t,\alpha} - \mu}{\sigma} = \Phi^{-1}(\alpha)$$

Por fim, a equação que define o VaR normal univariado é:

$$VaR_{t,\alpha}(i) = \mu_i + V_i \times z_\alpha \times \sigma_{i,t}$$

Onde: μ = média da distribuição de retornos do ativo i ;

V = valor do ativo i ;

α = nível de confiança;

z = função inversa da distribuição acumulada normal;

σ = volatilidade atrelada ao instrumento i no tempo t .

Caso a média da distribuição seja zero e variância unitária, então diz-se que o modelo é normal padronizado e a equação se resume a:

$$VaR_\alpha(i) = V_i \times z_\alpha \times \sigma_{i,t}$$

Para o caso de distribuições multivariadas normais (contendo mais de um fator de risco), a expressão pode ser reescrita conforme equação abaixo.

$$VaR_{\alpha}(carteira) = z_{\alpha} \sqrt{(EXP \times \Sigma \times EXP^T)} = \sqrt{(VaR_k \times P \times VaR_k^T)}$$

Onde:

EXP = vetor de exposições aos fatores de risco;

Σ = matriz variância-covariância entre retornos dos fatores de risco;

VaR_k = vetor de VaR de cada fator de risco k ;

P = matriz de correlação entre fatores de risco.

Modelo t-Student

Ao contrário da distribuição normal, a distribuição t-Student tem como características apresentar caudas mais pesadas e assumir assimetria, ou seja, apresenta característica leptocúrtica (XU; CHEN, 2012). O fato de apresentar caudas mais pesadas aproxima a distribuição t-Student da distribuição real dos fatores de risco. O VaR multivariado pode então ser obtido por:

$$\begin{aligned} VaR_{\alpha}(carteira) &= \mu + t_{\alpha, \vartheta} \sqrt{\frac{\vartheta - 2}{\vartheta}} \sqrt{(EXP \times \Sigma \times EXP^T)} \\ &= \mu + t_{\alpha, \vartheta} \sqrt{\frac{3 + k^*}{3 + 2k^*}} \sqrt{(EXP \times \Sigma \times EXP^T)} \end{aligned}$$

Onde:

ϑ = graus de liberdade;

t = função inversa da distribuição acumulada t -Student;

k = excesso de curtose (valor da curtose acima da curtose da distribuição normal, que é 3).

Outros modelos

Há diversos modelos que tentam obter o VaR assumindo uma distribuição para os retornos. No entanto, devido à simplicidade de cálculo e às limitações de sistema de informação para realizar os cálculos, os modelos normal, t -Student e *skewed* t -Student são mais comumente usados, conforme apontam Li e Nadarajah (2020), Dokov, Stoyanov e Rachev (2008), Yoon e Kang (2007) e Lambert e Laurent (2002).

Outros modelos, como Teoria de Valores Extremos (TVE) e Distribuição Generalizada de Pareto (DGP), têm caudas pesadas, mas apresentam alguns problemas adicionais quanto à definição dos parâmetros. Mais detalhes podem ser vistos em Giambiagi (2017).

Modelos não paramétricos e semiparamétricos

Distribuição empírica histórica ou de simulação histórica

A distribuição empírica histórica, ou simulação histórica (HS), é um modelo comumente utilizado por fundos de investimento devido a sua simplicidade e por não pressupor a distribuição de probabilidade dos retornos. Assim, eventos extremos têm maior chance de ocorrer do que nos modelos gaussianos, por exemplo.

Para aplicar o modelo, basta selecionar a janela de dados históricos para obter a série de retornos e calcular a perda histórica hipotética (PnL) para cada data da janela selecionada. Por fim, deve-se selecionar o quantil referente à série de PnL para obter o VaR.

Como a distribuição do PnL é discreta, é comum a necessidade de se realizar alguma interpolação para obter o quantil desejado ou, em caso de conservadorismo, obter o quantil disponível imediatamente inferior a α .

Distribuição empírica histórica com *bootstrapping*

O cálculo do VaR utilizando a distribuição empírica histórica com *bootstrapping* segue os mesmos passos do modelo descrito na seção "Distribuição empírica histórica ou de simulação histórica", mas usa o método *bootstrapping* para obter reamostras da janela de dados históricos com reposição, ou seja, são extraídas observações da amostra original, formando novas amostras. É um método indicado para séries com poucos dados.

Modelo Boudoukh-Richardson-Whitelaw

O modelo Boudoukh-Richardson-Whitelaw (BRW) foi desenvolvido por Boudoukh e outros (1998) e utiliza os mesmos passos da distribuição empírica histórica, mas usa um fator de decaimento para dar mais peso a dados mais recentes. Esses pesos representam uma probabilidade associada ao PnL da série histórica e são calculados usando o parâmetro λ . O somatório dos pesos deve ser igual a 1.

$$w_{t-i} = \lambda^{i-1} \frac{1 - \lambda}{1 - \lambda^N}$$

Onde:

N = número de observações da janela histórica;

λ = fator de decaimento.

Modelo Hull-White

Assim como o modelo BRW, que tenta ajustar a distribuição empírica dando pesos maiores a dados mais recentes, o modelo Hull-White (HW) ajusta a volatilidade da janela histórica usando um modelo de volatilidade condicional. Portanto, visa capturar a condição de heterocedasticidade³ que o modelo de simulação histórica não tem.

Radivojević, Ćurčić e Vukajlović (2017) relatam que inúmeros modelos foram desenvolvidos buscando melhorar a deficiência do modelo de simulação histórica, mas, de todos eles, esse modelo apresenta o melhor *tradeoff* entre facilidade de implementação e eficiência estatística. Ainda segundo os autores, o modelo desenvolvido por Hull e White (1998) foi renomeado de *Filtered Historical Simulation* (FHS).

A série de PnL é ajustada dividindo-se a volatilidade padrão estimada para a data T pela volatilidade condicional do período:

$$PnL_t^* = PnL_t \frac{\sigma_T}{\sigma_t}$$

Onde:

σ_t = volatilidade condicional no período t ($t < T$);

σ_T = volatilidade condicional dos períodos anteriores a t , obtidos dentro de uma janela temporal específica.

³ Heterocedasticidade é o fenômeno estatístico em que os dados de uma amostra não apresentam uma variância constante na janela histórica considerada.

Com a série de PnL modificada (PnL_t^*), obtém-se o quantil desejado para capturar o VaR. Pode ser necessária a realização de uma interpolação para se obter o quantil desejado, assim como os modelos anteriores.

Outros modelos

Há outros modelos mais modernos, como o *Kernel Density Estimation* (KDE), em que se busca estimar a função de densidade de probabilidade de uma distribuição desconhecida. É uma abordagem usada em métodos de *machine learning* para outras finalidades que não seja obtenção de VaR. Outros modelos podem ser encontrados em Jadhav e Ramanathan (2009).

Os modelos mais modernos de VaR utilizam técnicas de *machine learning* com métodos *full valuation*⁴ usando a Simulação de Monte Carlo com diversos cenários. A geração de cenários para a Simulação de Monte Carlo pode ser usada de diversas formas, inclusive usando o modelo *Exponentially Weighted Moving Average* (EWMA), no entanto, é custosa computacionalmente, pois é preciso gerar inúmeros valores para cada fator de risco, obedecendo-se às correlações entre eles. Métodos mais modernos usam as cópulas que podem capturar correlações não lineares de cauda.

Os métodos *full valuation* não serão testados neste trabalho, haja vista a limitação de sistemas.

⁴ Nesse método, a carteira/ativo é reprecificada a cada cenário da Simulação de Monte Carlo, evitando aproximações, principalmente para ativos com fatores de risco não lineares.

Modelos de volatilidade

Os modelos de VaR paramétricos e semiparamétricos são obtidos pela previsão da perda em função da volatilidade dos retornos. Por não se tratar de uma variável observável, é necessário estimar a volatilidade, com base em modelos desenvolvidos para isso. Esta seção apresenta a comparação entre diferentes formas de estimação da volatilidade para o cálculo do VaR.

Estimação da volatilidade incondicional EWMA *RiskMetrics*

Uma das metodologias mais conhecidas é a paramétrica normal *Exponentially Weighted Moving Average* (EWMA), desenvolvida pelo banco J. P. Morgan e pela Reuters, denominada metodologia *RiskMetrics* (MORGAN GUARANTY TRUST COMPANY; REUTERS, 1996).

Essa metodologia utiliza uma modelagem incondicional para as volatilidades que são ajustadas conforme o parâmetro lambda (λ), chamado de fator de decaimento exponencial.

A estimação da volatilidade EWMA pode ser obtida com a seguinte equação incondicional:

$$\sigma_{t+1}^2 = (1 - \lambda)r_t^2 + \lambda\sigma_t^2$$

Assim, o parâmetro λ ($0 < \lambda < 1$), fator de decaimento, é usado para dar mais peso às volatilidades recentes e fazer com que o modelo de VaR reaja mais rapidamente às oscilações de mercado. Quanto menor o valor de λ , mais rapidamente o modelo responde às oscilações recentes.

Da mesma forma, a matriz de covariância pode ser obtida:

$$\sigma_{xy,t+1}^2 = (1 - \lambda)r_{xt}r_{yt} + \lambda\sigma_{xy,t}^2$$

Onde x e y representam os fatores de risco.

Esse modelo pressupõe que os retornos são IID (independentes e identicamente distribuídos) e que sofrem variação aleatória normalmente distribuída.

Segundo o modelo *RiskMetrics*, os seguintes passos devem ser seguidos para se obter o parâmetro λ^* (lambda ótimo):

- Obter a estimação de volatilidade para cada fator de risco, conforme equação anterior.
- Obter o erro médio quadrático (RSME) comparando a volatilidade estimada com a volatilidade realizada:

$$RSME_i = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (r_{i,t}^2 - \sigma_{i,t}^2(\lambda))}$$

- Selecionar o lambda (λ_i) que minimiza o RSME para cada fator de risco.
- Encontrar o RSME relativo:

$$\theta_i = \frac{RSME_i}{\sum RSME_i}$$

- Definir os pesos (a soma dos pesos deve ser igual a um):

$$\phi_i = \frac{\theta_i^{-1}}{\sum \theta_i^{-1}}$$

- Encontrar o lambda ótimo ou global:

$$\lambda^* = \sum_{i=1}^N \phi_i \lambda_i$$

Para que a matriz de covariância seja semidefinida positiva, apenas um lambda deve ser usado para todos os fatores de risco, por isso deve-se utilizar o valor de λ^* .

A utilização de um lambda único ou global faz sentido não somente pela perspectiva da metodologia *RiskMetrics*, mas também pelo ponto de vista gerencial. Seria mais custosa a manutenção de diversos lambdas (um por carteira, por exemplo), pois há um risco operacional envolvido no controle e na configuração das variáveis. No tópico seguinte, é proposta uma metodologia alternativa para atender a esses diversos aspectos apontados.

Atualmente, a janela de dados históricos de retornos utilizada para efetuar o cálculo da volatilidade EWMA é de 252 dias úteis. Consultando a metodologia *RiskMetrics*, foram utilizados 550 dias, no entanto, menos dados são suficientes para o cálculo. Foram realizados testes com 550 dias, 300 dias, 252 e 100 dias e não foram identificadas grandes variações. Nesse sentido, constata-se que a aplicação de 252 dias úteis pode ser mantida.

Estimação da volatilidade incondicional EWMA *RiskMetrics* ajustada

Uma das limitações em se utilizar um lambda global com método puro *RiskMetrics* é que o lambda obtido não é necessariamente influenciado pelos fatores de risco que mais impactam a carteira.

Por exemplo, uma carteira contendo PETR4 com lambda 0,7 (peso RSME = 0,1) cuja exposição corresponde a 90% do total e curva PRE vértice de um dia útil com lambda de 0,98 (peso RSME = 0,9) com exposição de 10% do total teria um lambda global de 0,952, o que pode parecer incoerente, uma vez que o fator de risco de maior peso, em exposição, ficaria com lambda bem diferente.

Nesse sentido, um método alternativo é apresentado:

- Seguir os mesmos passos do *RiskMetrics* para obter lambda com menor RSME por fator de risco.
- Realizar a ponderação para obter o lambda global usando o peso das exposições, conforme equação:

$$\lambda^* = \sum_{i=1}^N \frac{EXP_i}{\sum EXP_i} \lambda_i$$

Assim, o valor do lambda ótimo do exemplo anterior passaria de 0,952 para 0,72 e teria mais chances de obter sucesso nos *backtests*. Essa hipótese é confirmada na seção de resultados, que será vista adiante.

Estimação da volatilidade condicional GARCH

O modelo de volatilidade EWMA é um caso particular do modelo *Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity* (GARCH). Os modelos GARCH afirmam que a variância apresenta heterocedasticidade, ou seja, varia com tempo, e reconhece tanto variâncias condicionais quanto incondicionais.

O modelo GARCH(p,q) pode ser descrito como:

$$r_t = \mu + \sigma_t \varepsilon_t$$
$$\sigma_t^\delta = \omega_0 + \alpha_i (\varepsilon_{t-1}^2)^\delta + \beta_i \sigma_{t-1}^\delta$$

Onde ε_t representa a variação aleatória independente e identicamente distribuída de média zero. Há uma série de famílias de modelos GARCH que modelam ε_t e conseqüentemente a variância, para diferentes distribuições, mas as mais usadas são os modelos GARCH normal, t-Student e t-Student assimétrica.

Segundo Gaio e Pimenta Júnior (2012), o modelo necessita de restrições adicionais como: $\alpha_i > 0$, $\beta_i > 0$, $\alpha_i + \beta_i < 1$ e $\omega_0 > 0$ para que não apresente variância negativa e haja estacionaridade.

Caso $\alpha_i + \beta_i = 1$, $\omega_0 = 0$ e $\delta = 2$, o modelo GARCH se torna equivalente ao modelo normal EWMA. Uma comparação entre as volatilidades EWMA e GARCH é realizada por Giambiagi (2017).

O modelo *Asymmetric Power ARCH* (APARCH) tem o parâmetro (γ) para ajuste de assimetria da distribuição, que é comum em séries financeiras, a fim de aumentar a possibilidade de

captura de eventos extremos. Sanches (2014) compara os modelos GARCH(1,1) e APARCH(1,1) usando a série de retornos do Ibovespa. A variância desse modelo segue a equação abaixo:

$$\sigma_t^\delta = \omega_0 + \alpha_i(|\varepsilon_{t-1}| - \gamma\varepsilon_{t-1}^2)^\delta + \beta_i\sigma_{t-1}^\delta, \gamma > 1 \text{ e } \delta \neq 2.$$

Os parâmetros $\alpha_i + \beta_i < 1$ representam a chamada volatilidade persistente, ou seja, quanto maior o valor de $\alpha_i + \beta_i$, mais o modelo responde às volatilidades mais recentes. Caso essa soma seja unitária, esse modelo se equivaleria ao modelo *Integrated* GARCH (IGARCH), conforme Rozga e Arnerić (2009).

A obtenção dos parâmetros é feita por otimização da maximização da função de log-verossimilhança, sujeita às restrições dos parâmetros para cada caso. Como os parâmetros do modelo GARCH podem ser obtidos facilmente pela otimização, isso se torna uma vantagem em relação ao modelo EWMA, que precisa da atribuição arbitrária do parâmetro lambda.

Outra vantagem desse modelo em comparação com o anterior é que não precisam ser utilizadas matrizes de variância-covariância entre fatores de risco. A desvantagem é que, em vez de se utilizar apenas um parâmetro, se consideram pelo menos três, que podem ser diferentes por carteira.

Há outros modelos mais modernos usando distribuições multivariadas (MGARCH), de acordo com Afzal e outros (2021). Além disso, há modelos EWMA com distribuição de Laplace, conforme apontam Lu, Huang e Gerlach (2010), Bohdalová e Greguš (2013) e Lucas e Zhang (2016).

Metodologias de *backtest*

Para o teste de aderência dos modelos de VaR, são utilizados os seguintes testes estatísticos: teste de Kupiec e teste da *duration*.

O teste de Kupiec verifica a proporção de violações de VaR, ou seja, se a quantidade de vezes em que o PnL extrapola o VaR está dentro do proposto pelo modelo, dado um nível de significância. Já o teste da *duration* avalia a dependência temporal das violações, ou seja, verifica se há formação de *cluster* de volatilidade em determinado período da série histórica. Se houver esse *cluster*, então o modelo não responde bem às mudanças de volatilidade.

A Circular 3.646/2013 solicita a utilização de diversos intervalos de confiança, abrangência de todas as operações de forma conjunta e separada, entre outras recomendações (BRASIL, 2013). Apesar da flexibilidade para escolher os testes, essa circular serviu como parâmetro, mesmo que não em sua totalidade, para os testes de aderência aqui utilizados.

Resultados

Estudo das distribuições de retornos das carteiras

Antes de iniciar os estudos sobre os diversos modelos de VaR, é importante verificar o comportamento das distribuições dos retornos das carteiras.

Na Tabela 1, são apresentadas algumas estatísticas básicas das distribuições de retorno hipotético das 16 principais carteiras do BNDES.

Tabela 1 • Estatística descritiva da distribuição de retornos das carteiras

Assimetria	Curtose
-2,75	29,64
-3,11	46,78
0,28	20,87
-1,24	32,11
3,13	43,13
0,71	4,75
-3,07	42,40
-3,11	46,83
0,73	39,88
0,58	7,46
-3,14	47,39
-2,70	28,67
-2,68	28,61
-1,31	11,31
0,03	26,22
0,12	30,95

Fonte: Elaboração própria.

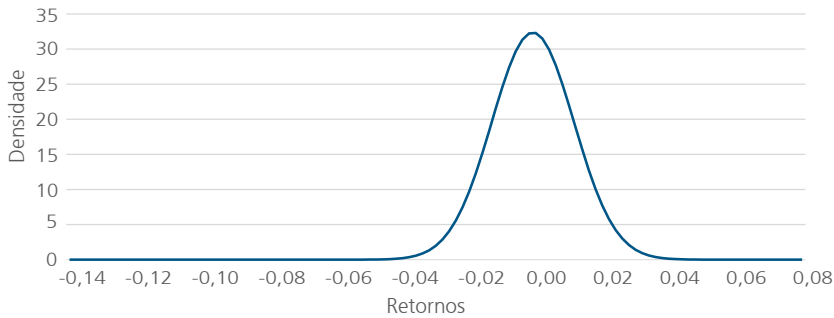
Nota-se, portanto, que as distribuições apresentam, em sua maioria, alta assimetria, assim como alta curtose, indicando inicialmente uma possível não aderência à distribuição normal.

O Gráfico 1 apresenta a distribuição de perdas e ganhos da carteira principal. Chamamos de carteira principal aquela em que todos os instrumentos são incluídos.

Pela figura, identifica-se que a distribuição é leptocúrtica, em que caudas maiores são encontradas no lado esquerdo e negativo. A afirmação se confirma com o valor da curtose maior que três. Além disso, a distribuição é não simétrica, uma vez que apresenta coeficiente de assimetria negativo, diz-se, portanto, que é assimétrica à esquerda.

Contudo, a distribuição é aproximadamente centralizada na região de média zero.

Gráfico 1 • Distribuição de perdas da carteira principal

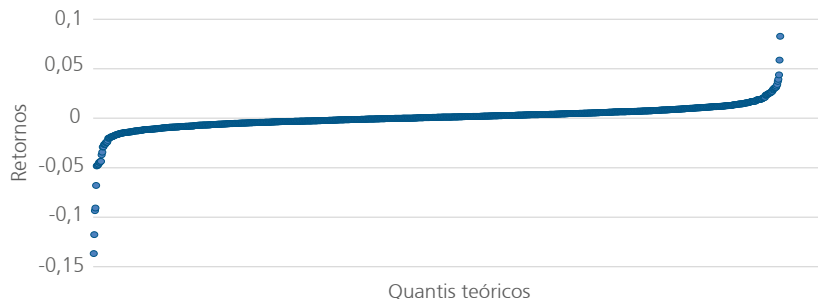


Fonte: Elaboração própria.

Usando o método *Bayesian Information Criterion* (BIC), a distribuição mais aderente à série de dados é a t-Student de 2,75512 graus de liberdade.

Um método visual comumente utilizado para verificar sua aderência à distribuição normal é o gráfico *quantile-quantile plot* (qq-plot), no qual também é possível identificar que a distribuição apresenta caudas mais pesadas.

Gráfico 2 • Gráfico qq-plot da distribuição de perdas da carteira principal



Fonte: Elaboração própria.

Parâmetros de *backtest*

Os parâmetros que serão utilizados a todas as carteiras são apresentados a seguir.

Tabela 2 • Parâmetros de *backtest*

Data base	30.6.2021
HP	1 du
Nível de confiança	99%
Janela de dados para volatilidade	252 du
Data do início da série de exposições ¹	1.1.2017

Fonte: Elaboração própria.

Nota: 1. As séries de dados históricos dos fatores de risco, sobretudo curvas, estão disponíveis e tratadas a partir de 1.1.2016.

Os níveis de significância testados são de 1%, 5% e 10%. As janelas de dados para volatilidade podem ser alteradas conforme o caso, mas será informado quando ocorrer.

Modelo paramétrico normal EWMA

O primeiro modelo a ser testado é o modelo EWMA normal. Para obtenção do lambda ótimo global, foram filtrados somente os fatores de risco existentes na carteira principal, pois representam a totalidade de fatores de risco de mercado em que a carteira do BNDES estava sujeita na data base.

O lambda médio que minimiza o RSME de cada fator de risco foi de 0,8986. Já o lambda ótimo, conforme metodologia *RiskMetrics*, foi de 0,8888.

Após ponderação dos lambdas de cada fator de risco por sua contribuição na exposição total, obtém-se lambda ótimo global de 0,92 e,

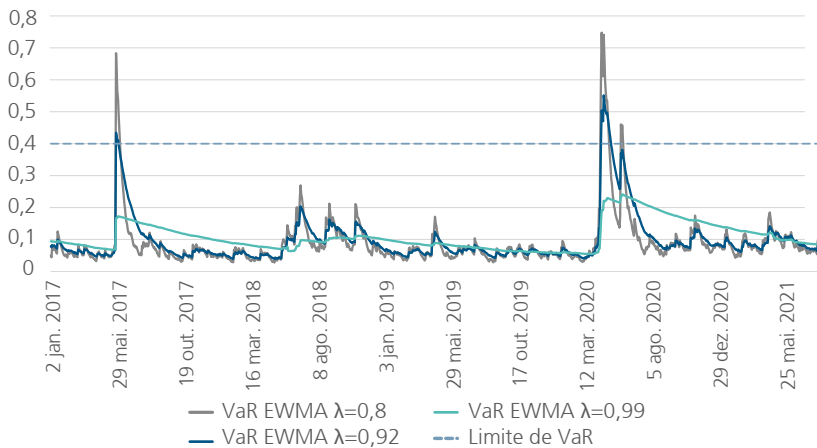
das 16 carteiras testadas, seis (37,5%) foram aprovadas para o λ de 0,92. As principais carteiras também foram aprovadas usando retorno efetivo com mesmo λ .

Impacto do fator de decaimento no VaR EWMA

O parâmetro serve de ajuste para capturar informações mais recentes de volatilidade, ou seja, por meio desse parâmetro é possível ajustar o modelo para dar mais peso às informações mais recentes.

Quanto maior o peso a informações recentes, isto é, menor o valor do λ , mais variável se torna o VaR. Nesse sentido, o VaR apresenta picos e vales maiores. O Gráfico 3 elucida o ponto levantado.

Gráfico 3 • Impacto do parâmetro λ no VaR EWMA (R\$ bilhões)

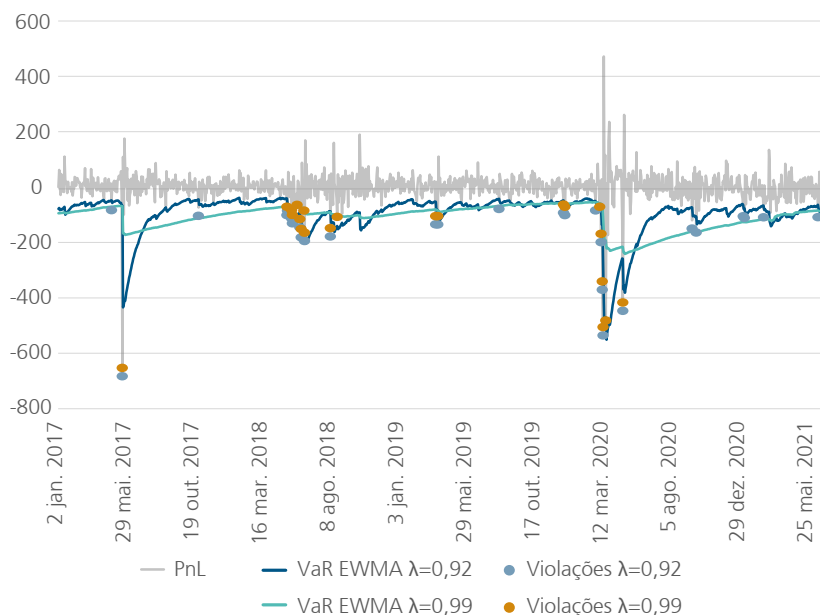


Fonte: Elaboração própria.

De maneira oposta, quanto maior o valor do parâmetro λ , mais estável tende a se tornar os valores de VaR. Apesar de parecer tentador o uso de λ s mais altos, já que possibilita a redução

da volatilidade do VaR, deve-se observar que esse modelo pode não atingir satisfatoriamente seu objetivo de previsão de uma perda esperada. No Gráfico 4, são localizadas, juntamente com o VaR, as perdas da carteira.

Gráfico 4 • Impacto do parâmetro lambda no VaR EWMA (R\$ milhões)



Fonte: Elaboração própria.

É possível identificar que um modelo de VaR com lambda muito alto pode não retratar a realidade da perda e tende a ter menos chances de ser aprovado em *backtests*, por gerar *clusters* de volatilidade. Nota-se, portanto, um *tradeoff* entre eficiência estatística e desempenho gerencial.

No exemplo acima, o modelo com $\lambda=0,92$ apresentou 27 violações no período, enquanto o modelo de fator de 0,99 apresentou apenas 21 violações. Entretanto, as violações do modelo com

fator de 0,99 ficaram mais concentradas em determinadas regiões na série de tempo, justamente pela demora em responder às oscilações do mercado.

Modelos paramétricos GARCH

Há diversos modelos da família GARCH. A escolha do melhor modelo deve ser realizada selecionando os menores valores de AIC e BIC, sendo BIC a melhor opção, pois penaliza modelos com muitos parâmetros (PERLIN *et al.*, 2021).

No entanto, a comparação de modelos orientada apenas pelos valores de AIC e BIC pode acarretar seleção de modelos ruins. É necessário também analisar os demais parâmetros.

Os parâmetros dos modelos também devem apresentar significância estatística, principalmente se $\alpha_i + \beta_i \leq 1$ e $\omega > 0$, que normalmente se observa em séries financeiras. Se o modelo for assimétrico, então $\gamma > 0$ é uma restrição adicional.

A Tabela 3 exibe os resultados dos modelos GARCH de média zero testados para a carteira principal, de forma semelhante ao estudo de Gabriel (2014).

Pelos resultados, o modelo mais adequado utiliza a distribuição t-Student assimétrica com $\delta = 1,5$, o que vai ao encontro dos estudos de Sanches (2014). O modelo assimétrico apresenta valores de BIC melhores que o modelo com distribuição normal.

Tabela 3 • Parâmetros dos modelos GARCH

	Normal GARCH		t-Student GARCH		t-Student assimétrica GARCH	
Descrição do modelo	GARCH (p: 1, q: 1)	GARCH (p: 1, q: 1)	GJR-GARCH (p: 1, α : 2, q: 1)	TARCH- ZARCH (p: 1, α : 1, q: 1)	GJR- GARCH (p: 1, α : 1, q: 1)	APARCH (pw: 1.5, p: 1, α : 1, q: 1)
α	0,31	0,13	0,05	0,06	0,05	0,06
β	0,57	0,78	0,75	0,83	0,75	0,79
γ_1			0,19	0,14	0,19	0,18
γ_2			0,00			
ω	0,26	0,13	0,16	0,09	0,16	0,13
Graus de liberdade		4,85	5,14	5,03	5,14	5,12
Volatilidade persistente ($\alpha + \beta$)	0,88	0,92	0,81	0,89	0,81	0,85
Log- likelihood	-1.791,01	-1.721,62	-1.715,48	-1.715,98	-1.715,48	-1.714,62
AIC	3.588,02	3.451,24	3.442,97	3.441,96	3.440,97	3.439,24
BIC	3.603,10	3.471,34	3.473,13	3.467,09	3.466,10	3.464,37

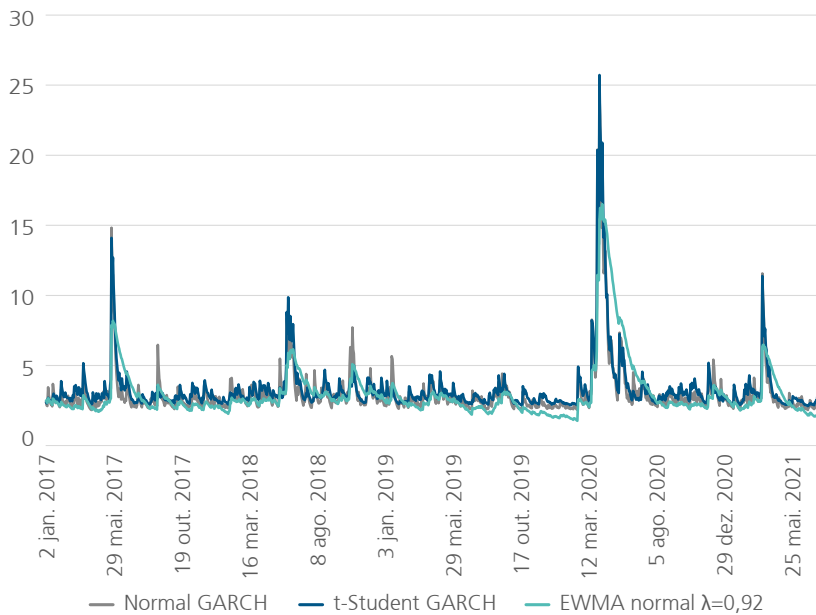
Fonte: Elaboração própria.

Executando o cálculo de VaR para a carteira principal dos modelos paramétricos normal GARCH e t-Student APARCH e comparando-os ao modelo normal EWMA, nota-se que os modelos GARCH apresentam maiores valores de VaR e menos extrapolações.

Graficamente, é possível facilmente comparar os modelos e confirmar que o EWMA normal reage mais lentamente que os demais, gerando picos menores em períodos de turbulência e

patamares menores em períodos de calmaria do mercado, conforme o Gráfico 5. Esse comportamento leva a um número maior de extrapolações em relação aos demais modelos.

Gráfico 5 • Comparação de VaR entre modelos paramétricos (R\$ bilhões)



Fonte: Elaboração própria.

Quanto aos testes de aderência, conforme já relatado no trabalho de Sanches (2014), os modelos t -Student APARCH apresentam melhores resultados no teste de Kupiec, pois demonstram menos violações em relação aos demais modelos. Contudo, neste estudo não constam testes da *duration*.

A Tabela 4 mostra a mesma comparação anterior usando o modelo EWMA normal de $\lambda=0,92$ (o único aprovado em ambos os testes) com os modelos GARCH para a carteira principal.

Tabela 4 • *Backtest* dos modelos paramétricos

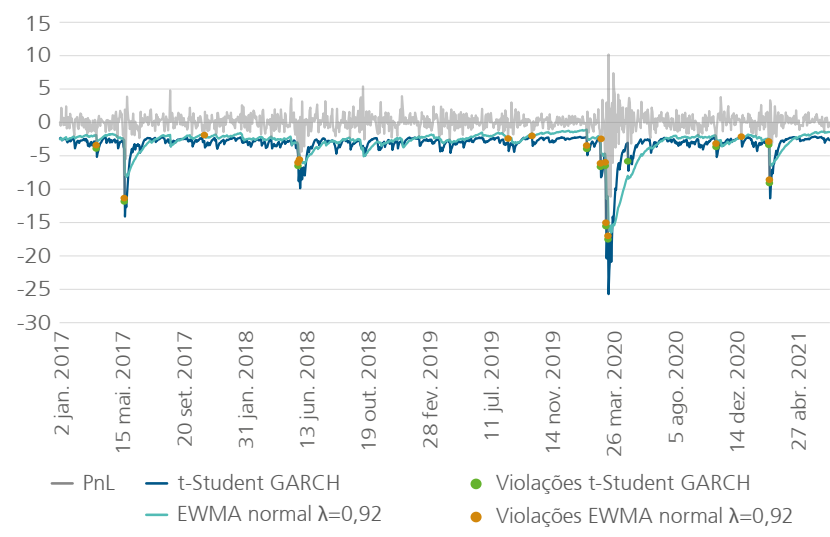
Modelo	Número de violações	Teste de Kupiec	Teste da <i>duration</i>
t-Student APARCH	12	0,83	0,01
Normal GARCH	15	0,29	0,08
EWMA $\lambda=0,92$	17	0,11	0,09

Fonte: Elaboração própria.

Primeiramente, cabe ressaltar que os modelos GARCH obtiveram, em geral, mais aprovações nos testes que o modelo EWMA normal, considerando o desempenho em todas as carteiras.

Apesar do número mais baixo de violações de VaR, o modelo GARCH apresenta desempenho inferior no teste da *duration* comparativamente ao modelo EWMA normal.

Gráfico 6 • Comparação de VaR entre modelos EWMA e GARCH (R\$ bilhões)



Fonte: Elaboração própria.

Pelo exposto no Gráfico 6, percebe-se que os modelos apresentam violação de VaR nas mesmas localidades, contudo, o modelo EWMA normal apresenta violações adicionais em localizações onde o estresse de mercado é relativamente baixo.

Modelo de simulação histórica

O modelo de simulação histórica (HS) é simples e rápido, mas, como já mencionado, depende fortemente da janela histórica selecionada. Para os mesmos 252 dias úteis, como selecionado no EWMA normal, o modelo demora a reagir às oscilações mais recentes.

Executando teste para a carteira principal com os mesmos parâmetros citados anteriormente, o modelo apresentou 14 violações, ou seja, menor número de violações se comparado ao modelo EWMA normal de 0,92, cujo número de extrapolações alcançadas foi de 17 violações no mesmo período.

A Tabela 5 exibe o resultado dos testes para diferentes janelas históricas.

Tabela 5 • *Backtest* do modelo de simulação histórica

Janela histórica	Número de violações	Teste Kupiec	Teste da <i>duration</i>
21	55	0,00	0,60
63	22	0,00	0,95
100	11	0,94	0,28
126	20	0,02	0,01
200	14	0,43	0,00
252	14	0,43	0,00

Fonte: Elaboração própria.

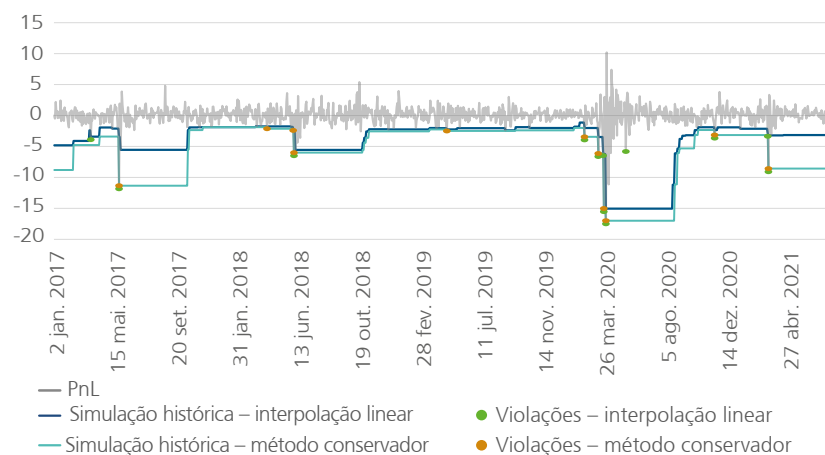
Contudo, conforme esperado, o modelo apresenta dificuldades para ser aprovado em ambos os testes de forma simultânea. Com janelas históricas curtas, o número de violações aumenta e o modelo é reprovado no teste de Kupiec, mas é aprovado no teste da *duration*. De forma oposta, se aumentar a janela histórica, o modelo é aprovado no teste de Kupiec e é reprovado no teste da *duration*.

Com janela histórica de cem dias, o modelo conseguiu aprovação, entretanto pode não ter tanta sorte se a janela histórica do *backtest* se iniciar antes de 2017, aumentando a série histórica.

Nos testes apresentados na Tabela 5 foram utilizadas interpolações para obtenção do quantil desejado, pois trata-se de distribuição discreta. Em todos os casos, utilizou-se o quantil imediatamente inferior, que chamamos de método conservador.

No Gráfico 7, pode-se verificar que se utilizarmos um método linear de interpolação para um modelo com janela histórica de cem dias, o número de extrapolações chega a 25 ante 17 do método conservador.

Gráfico 7 • Comparação de VaR HS com diferentes métodos (R\$ bilhões)



Fonte: Elaboração própria.

A janela histórica de cem dias é muito utilizada por fundos de investimento que usam esse modelo de VaR.

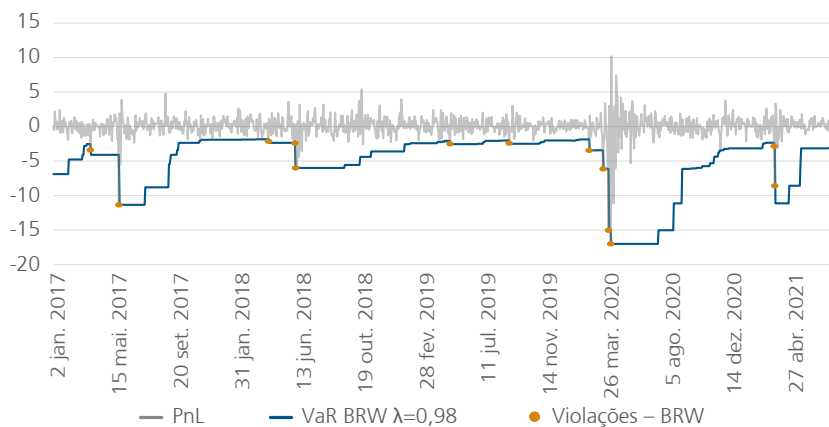
Modelo BRW

O modelo BRW foi testado para todas as carteiras, utilizando diversos parâmetros de decaimento. Assim como o EWMA normal, esse modelo também necessita da definição do parâmetro de decaimento, contudo, apresenta cálculos mais simples por não envolver matriz de variância-covariância.

A vantagem desse modelo é que não será necessário utilizar os demais testes para verificar as suposições sobre a distribuição de retornos, como ocorre, por exemplo, nos modelos EWMA.

No Gráfico 8 são exibidas as violações desse modelo, totalizando 13 ocorrências, número inferior ao modelo de simulação histórica.

Gráfico 8 • Violações de VaR do modelo BRW (R\$ bilhões)



Fonte: Elaboração própria.

Com relação à aprovação nos testes, 81,25% das carteiras (13 das 16 carteiras), incluindo a carteira principal, foram aprovadas com λ de 0,98 com nível de significância de 5%. Esse desempenho é bem superior aos modelos paramétricos, principalmente o modelo EWMA normal.

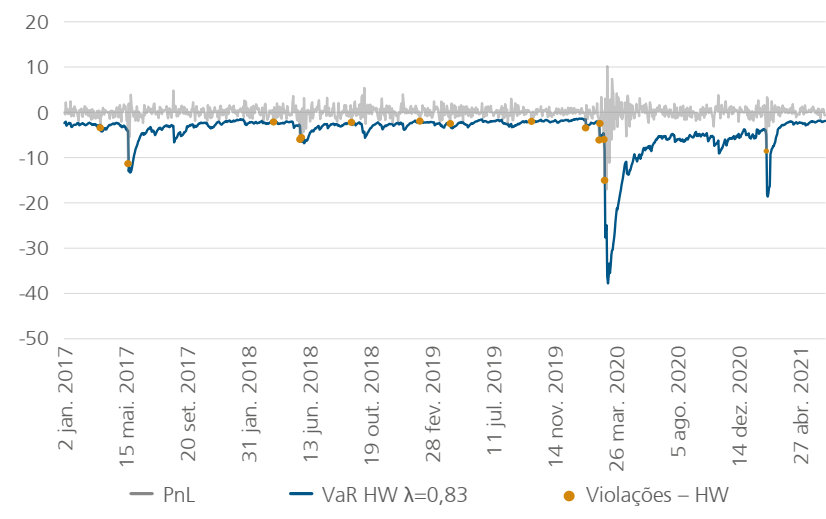
Modelo HW

Para o modelo HW, foi utilizada a volatilidade condicional EWMA para normalização dos retornos da carteira. Todas as carteiras foram testadas para os mesmos λ s dos modelos anteriores.

Ressalta-se que esse modelo tem um parâmetro adicional, que é a janela de simulação das volatilidades, além da janela histórica das perdas. Para ambos os casos foram utilizados 252 dias úteis.

Esse modelo obteve aprovação de 93,75% das carteiras (15 em 16), com λ de 0,83 a um nível de significância de 5%.

Gráfico 9 • Violações de VaR do modelo HW (R\$ bilhões)



Fonte: Elaboração própria.

Assim como os modelos não paramétricos anteriores, que utilizam fator de decaimento, esse modelo também apresenta bom desempenho. O modelo HW de $\lambda=0,83$ somente é superado pelo modelo t-Student APARCH em termos de números de violações (12) e pelo modelo BRW (13). A Tabela 6 apresenta essa comparação. No entanto, de forma geral, levando-se em conta as demais carteiras, o modelo HW teve desempenho superior aos demais.

Tabela 6 • Comparações entre modelos de VaR com fator de decaimento

	Modelo EWMA $\lambda=0,92$	Modelo HW $\lambda=0,83$	Modelo BRW $\lambda=0,98$
Violações	17	15	13

Fonte: Elaboração própria.

É importante salientar que esse modelo atinge valores muito altos em momentos de estresse, como pode ser observado no estresse ocorrido em março de 2020 em decorrência da Covid-19.

Para esse comportamento em específico, seria interessante testar esse modelo para diferentes janelas de simulação da volatilidade condicional, com intuito de amenizar os efeitos das informações mais recentes.

Comparação entre modelos

Os critérios para seleção do melhor modelo devem ser baseados na relação entre facilidade de implementação *versus* eficiência estatística. Nesse sentido, os critérios para seleção dos modelos devem abranger os seguintes itens:

- aprovação no teste de Kupiec;
- aprovação no teste da *duration*;

- aprovação nos testes sobre suposições sobre as distribuições de retorno, se for necessário;
- maior índice de cobertura de carteiras;⁵
- facilidade de implementação.

Os modelos aprovados em seus testes estatísticos e seus respectivos índices de cobertura podem ser vistos na Tabela 7. Apesar de os modelos HW e t-Student APARCH estarem empatados com incríveis níveis de cobertura, o modelo HW leva vantagem, uma vez que apresenta desempenho superior ao teste da *duration* para diversos níveis de significância e no quesito facilidade de implementação.⁶

Tabela 7 • Índice de cobertura dos modelos selecionados

Modelos selecionados	Índice de cobertura	Facilidade de implementação
t-Student APARCH	93,75%	4
HW $\lambda=0,83$	93,75%	3
BRW $\lambda=0,98$	81,75%	2
HS janela cem dias	75%	2
EWMA $\lambda=0,92$	37,50%	1

Fonte: Elaboração própria.

O critério facilidade de implementação depende de alguns fatores, sobretudo: impacto na mudança de um modelo já em uso para outro novo modelo, dificuldade de implementação em sistema de informação, capacidade de assimilação da equipe e da Alta Administração e facilidade de revisão periódica dos parâmetros.

⁵ Refere-se à proporção de carteiras aprovadas nos testes de cada modelo em relação ao total de carteiras analisadas. Neste estudo, foram analisadas 16 carteiras.

⁶ O critério de facilidade de implementação é subjetivo, assim os valores atribuídos neste estudo podem ser diferentes para a realidade de outras instituições.

Considerações finais

Este estudo visitou os modelos clássicos de VaR a fim de aplicá-los às carteiras gerenciais do BNDES e discutir sua relação entre eficiência estatística e desempenho gerencial.

Os modelos foram confrontados com base nos testes de aderência de Kupiec e da *duration*, que avaliam respectivamente a adequabilidade em termos de quantidade de violações e a dependência temporal das violações observadas. Além disso, foram avaliadas outras características dos modelos, como facilidade de implementação computacional, possibilidade de entendimento e interpretação pelos usuários da informação e quantidade de parâmetros a serem estimados, bem como facilidade de estimação desses parâmetros.

Entre os modelos avaliados, estão: t-Student APARCH, Hull-White, Boudoukh-Richardson-Whitelaw (BRW), simulação histórica (HS) e normal EWMA. Os modelos HW e t-Student APARCH apresentaram os melhores níveis de cobertura, porém o modelo HW teve desempenho superior aos demais no teste da *duration* para diversos níveis de significância.

No quesito facilidade de implementação, os modelos t-Student APARCH, Hull-White e normal EWMA foram os mais bem avaliados. Já os modelos da família GARCH apresentam uma série de parâmetros se comparados aos demais, além da possibilidade de requerer parâmetros distintos por carteira, elevando ainda mais a dificuldade de implementação.

Um fator importante a ser pontuado é que cada carteira pode ter um próprio modelo, mas há riscos operacionais envolvidos na manutenção de diversos parâmetros e interpretações. Assim, recomenda-se a

utilização de apenas um modelo e uma mesma gama de parâmetros a todos os modelos para facilitar a gestão de risco.

Destaca-se que toda instituição deve dispor de critérios objetivos para selecionar o melhor modelo de VaR e que o mesmo modelo considerado adequado por uma instituição pode não ser para outras. Isso ocorre porque o critério “facilidade de implementação” depende de fatores como disponibilidade de sistemas de informação adequados para implementação, grau de conhecimento dos usuários internos da informação, custos de transição entre diferentes modelos selecionados, quantitativo de pessoal disponível para a parametrização, estudo e desenvolvimento de modelos.

Adicionalmente, os testes de aderência podem gerar resultados diferentes dependendo da carteira da instituição avaliada. Nesse sentido, é inviável determinar objetivamente qual é o melhor modelo de VaR a ser utilizado, sendo necessários testes e avaliações contínuas.

No que se refere às carteiras avaliadas neste estudo, recomenda-se a utilização de um mesmo modelo e mesmo parâmetro a todas as carteiras, usando o critério “maior índice de cobertura”, que mede a aprovação em todas as carteiras.

Para trabalhos futuros, propõe-se a comparação entre modelos modernos de VaR, como: Simulação de Monte Carlo, GARCH multivariados, EWMA robusto com distribuição de Laplace e técnicas de *machine learning* com intuito de verificar se eles podem apresentar desempenho superior aos modelos tradicionais.

Referências

- AFZAL, F. *et al.* Value-at-risk analysis for measuring stochastic volatility of stock returns: using GARCH-based dynamic conditional correlation model. *Sage Open*, Thousand Oaks, v. 11, n. 1, p. 1-11, 2021.
- ALEXANDER, C. *Value-at-risk models*. Hoboken: John Wiley & Sons, 2008.
- BOHDALOVÁ, M.; GREGUŠ, M. VaR based risk management. In: CBU INTERNATIONAL CONFERENCE ON INTEGRATION AND INNOVATION IN SCIENCE AND EDUCATION, 1., 2013, Prague. *Proceedings [...]*. Prague: CBU, 2013. p. 25-33.
- BOUDOUKH, J.; RICHARDSON, M.; WHITELAW, R. The best of both worlds: A Hybrid Approach to Calculating Value at Risk. *SSRN*, Amsterdam, 1998. Disponível em: https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=51420. Acesso em: 25 mai. 2022.
- BRASIL. Banco Central do Brasil. *Circular nº 3.646, de 4 de março de 2013*. Brasília, DF: Bacen, 2013.
- DOKOV, S.; STOYANOV, S. V.; RACHEV, S. Computing VaR and AVaR of skewed-t distribution. *Journal of Applied Functional Analysis*, Amsterdam, v. 3, p. 189-209, 2008.
- GABRIEL, V. M. D. S. Multivariate models to forecast portfolio value at risk: from the dot-com crisis to the global financial crisis. *Review of Business Management*, São Paulo, v. 16, n. 51, p. 299-318, 2014.
- GAIO, L. E.; PIMENTA JÚNIOR, T. Value-at-risk da carteira do Ibovespa: uma análise com o uso de modelos de memória longa. *Gestão e Produção*, São Carlos, v. 19, n. 4, p. 779-792, 2012.
- GIAMBIAGI, F. (org.). *Derivativos e risco de mercado*. Rio de Janeiro: PUC-Rio, 2017.
- HAUGH, M. IEOR E4602: quantitative risk management. *Martin Haugh*, London, 2016. Disponível em: <https://martin-haugh.github.io/teaching/qrm/>. Acesso em: 29 mai. 2022.
- HULL, J.; WHITE, A. Incorporating volatility updating into the historical simulation method for value-at-risk. *Journal of Risk*, London, v. 1, n. 1, p. 5-19, 1998.

JADHAV, D.; RAMANATHAN, T. V. Parametric and non-parametric estimation of value-at-risk. *The Journal of Risk Model Validation*, London, v. 3, n. 1, p. 51-71, 2009.

LAMBERT, P.; LAURENT, S. *Modelling skewness dynamics in series of financial data using skewed location-scale distributions*. Louvain-la-Neuve: Université Catholique de Louvain, 2002. 32 p. (Discussion paper, n. 119).

LI, R.; NADARAJAH, S. A review of Student's t distribution and its generalizations. *Empirical Economics*, Berlin, v. 58, p. 1461-1490, 2020.

LU, Z.; HUANG, H.; GERLACH, R. *Estimating value at risk: from JP Morgan's standard-EWMA to skewed-EWMA forecasting*. Sidney: University of Sydney, 2010. 20 p. (OME Working Paper No: 01/2010).

LUCAS, A.; ZHANG, X. Score-driven exponentially weighted moving averages and Value-at-Risk forecasting. *International Journal of Forecasting*, Amsterdam, v. 32, n. 2, p. 293-302, 2016.

MORGAN GUARANTY TRUST COMPANY. REUTERS. Riskmetrics – Technical Document. 4. ed. New York: JP Morgan: Reuters, 1996.

PERLIN, M. S. *et al.* A GARCH tutorial with R. *Revista de Administração Contemporânea*, Maringá, v. 25, n. 1, p. 1-16, 2021.

RADIOJEVIĆ, N.; ĆURČIĆ, N. V.; VUKAJLOVIĆ, D. D. Hull-White's value at risk model: case study of Baltic equities market. *Journal of Business Economics and Management*, London, v. 18, n. 5, p. 1023-1041, 2017.

ROZGA, A.; ARNERIĆ, J. Dependence between volatility persistence, kurtosis and degrees of freedom. *Investigación Operacional*, La Habana, v. 30, n. 1, p. 32-39, 2009.

SANCHES, G. F. Estimação de value at risk para horizontes superiores a um dia por meio dos processos estocásticos GARCH e APARCH combinados com simulação de Monte Carlo. *Revista do BNCDES*, Rio de Janeiro, n. 41, p. 435-480, 2014.

XU, C.; CHEN, H. *Measuring portfolio value at risk*. 2012. Tese (Mestrado em Negócios e Economia) – School of Economics and Management, Lund University, Lund, 2012.

YOON, S.; KANG, S. A skewed student-t value-at-risk approach for long memory volatility processes in Japanese financial markets. *Journal of International Economic Studies*, [s. l.], v. 11, n. 1, p. 211-240, 2007.