



Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Tecnologia e Ciências

Instituto de Matemática e Estatística

Samuel de Oliveira Cardoso

Matemática Financeira com abordagem pela Modelagem Matemática

Rio de Janeiro

2022

Samuel de Oliveira Cardoso

Matemática Financeira com abordagem pela Modelagem Matemática



Monografia apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Especialista em Aprendizagem em Matemática ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof. Dr. Moisés Ceni de Almeida

Rio de Janeiro

2022

**Ficha elaborada pelo autor através do Sistema para Geração
Automática de Ficha Catalográfica da Rede Sirius – UERJ**

C268 Cardoso, Samuel de Oliveira.
Matemática Financeira com abordagem pela
Modelagem Matemática / Samuel de Oliveira Cardoso. –
2022.
143 f.

Orientador: Moisés Ceni de Almeida.
Monografia apresentada à Universidade do Estado do
Rio de Janeiro, Instituto de Matemática e
Estatística, para obtenção do grau de especialista em
Especialização em Aprendizagem em Matemática

1. Educação Financeira - Monografias. 2.
Matemática Financeira - Monografias. 3. Modelagem
Matemática - Monografias. I. Almeida, Moisés Ceni
de. II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro.
Instituto de Matemática e Estatística. III. Título.

CDU 159.9

Autorizo para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial deste projeto
final, desde que citada a fonte.

Assinatura

Data

Samuel de Oliveira Cardoso

Matemática Financeira com abordagem pela Modelagem Matemática

Monografia apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Especialista em Aprendizagem em Matemática ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 22 de dezembro de 2022.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Moisés Ceni de Almeida
Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro – UFRRJ

Prof.^a Dra. Aline de Lima Guedes
Instituto de Matemática e Estatística – UERJ

Prof. Dr. Rafael Filipe Novôa Vaz
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do
Rio de Janeiro – IFRJ

Rio de Janeiro

2022

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho à minha querida esposa Aline e aos meus amados pais (*in memoriam*): Moema e Rivaldo, pilares na minha trajetória.

AGRADECIMENTOS

À minha família e a Deus por estarem sempre ao meu lado e por serem, continuamente, fontes de inspiração e de sabedoria.

Aos Professores e à Coordenação da Especialização em Aprendizagem em Matemática da UERJ pelas aulas ministradas e pelas diferentes disciplinas ofertadas, que oferecem uma importante visão teórica e pedagógica sobre temas centrais da Escola Básica.

Aos meus colegas e amigos das Turmas de 2021 e 2022 desta Especialização pelo nosso agradável convívio e pelas trocas acadêmicas que tivemos durante as aulas e as atividades deste curso de pós-graduação.

Ao meu orientador, professor Moisés Ceni, pela confiança, em mim depositada para desenvolver este trabalho, que possui grande relevância para a Escola Básica e para a formação docente no Brasil. E ainda por seu trabalho como orientador, realizado de forma pró-ativa, detalhista e colaborativa. Sou grato por sua amizade e pelos seus incentivos acadêmicos.

Ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para a sua própria produção ou a sua construção.

(Paulo Freire)

Uma grande descoberta resolve um grande problema, mas há sempre uma pitada de descoberta na resolução de qualquer problema.

(George Polya)

Nas questões matemáticas não se compreende a incerteza nem a dúvida, assim como tampouco se podem estabelecer distinções entre verdades médias e verdades de grau superior.

(Hilbert)

RESUMO

CARDOSO, Samuel de Oliveira. **Matemática Financeira com abordagem pela Modelagem Matemática**. 2022. 136 f. Monografia (Especialização em Aprendizagem em Matemática) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2022.

Este trabalho apresenta conteúdos matemáticos com as abordagens crítica e reflexiva para o desenvolvimento da Matemática Financeira por meio da mediação da Modelagem Matemática. É importante mencionar o papel de destaque das ferramentas tecnológicas durante a execução das tarefas de modelagem. No trabalho, realiza-se uma discussão teórica a partir da Matemática Financeira e da Educação Matemática, aplicando-se ainda uma Oficina de Matemática Financeira com os princípios da modelagem para a análise dos principais resultados observados. Adicionalmente, realiza-se uma discussão sobre o papel da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) na maior ênfase das habilidades financeiras dos alunos. Por fim, a pesquisa aponta para maiores desafios direcionados a alunos e a professores diante do atual contexto e sugere um esforço nacional para a melhoria da formação do professor de Matemática em relação a esta temática.

Palavras-chave: Matemática Financeira. Modelagem Matemática. Educação Financeira. Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – O aluno e o professor - Modelagem.....	23
Figura 2 – Modelos segundo D'Ambrosio (2012).....	27
Figura 3 – Gráficos de juros no GeoGebra.....	33
Figura 4 – Tema inflação abordado no ENEM.....	40
Figura 5 – Inflação x dinheiro.....	41
Figura 6 – Juros simples x Montantes formados.....	43
Figura 7 – Juros compostos x Montantes acumulados.....	43
Figura 8 – Juros x funções reais.....	45
Figura 9 – Séries uniformes e Valor Presente.....	48
Figura 10 – Diferentes formas de pagamento	50
Figura 11 – Crédito Rotativo.....	64
Figura 12 – Exemplo de código identificador competência.....	71
Figura 13 – Diagrama financeiro.....	79
Figura 14 – Planilha de análise financeira.....	80

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Diferentes concepções sobre Modelagem Matemática.....	18
Tabela 2 – Taxas proporcionais e equivalentes.....	38
Tabela 3 – Modelagem de séries antecipadas a partir de postecipadas.....	49
Tabela 4 – Diferentes representações - tempo focal 2.....	50
Tabela 5 – Diferentes representações - tempo focal 3.....	51
Tabela 6 – Fatura de cartão de crédito.....	65
Tabela 7 – Instrumentos didáticos na modelagem financeira.....	67

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 – Conclusão do Ensino Médio.....	85
Gráfico 2 – Mat.Fin. pré-universitária.....	85
Gráfico 3 – Mat.Fin. na Lic. do IFRJ.....	85
Gráfico 4 – Conhec. sobre Modelagem Matemática.....	86
Gráfico 5 – Conhec. sobre Educação Matemática Crítica (EMC).....	86

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	13
1 REVISÃO DE LITERATURA SOBRE MODELAGEM MATEMÁTICA E EDUCAÇÃO FINANCEIRA	16
1.1 <u>Modelagem Matemática</u>	16
1.2 <u>Matemática Financeira e Educação Financeira</u>	27
1.2.1 Caracterização e reconhecimento dos regimes de capitalização.....	32
1.2.2 Juros simples e compostos modelados por outros instrumentos matemáticos.....	43
1.2.3 Séries uniformes de prestações fixas e amortizações.....	46
1.2.4 Outras perspectivas das modelagens aplicadas à Matemática Financeira.....	59
1.2.5 Educação Financeira e Matemática Financeira na BNCC.....	67
2 OFICINA DE MATEMÁTICA FINANCEIRA	77
2.1 <u>Aspectos preparatórios e metodológicos da Oficina</u>	77
2.2 <u>Análise dos resultados da Oficina</u>	85
CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	88
APÊNDICE A – Banco Central do Brasil – Calculadora do Cidadão.....	93
APÊNDICE B – Noções de Logaritmos e Progressões.....	97
APÊNDICE C – Apresentação realizada na Oficina de Mat. Fin. – IFRJ (Paracambi).....	105
APÊNDICE D – Questionários Inicial e Final da Oficina de Mat. Fin. (Google Forms).....	131
ANEXO – Material para a OBMEP sobre Financiamentos.....	139

INTRODUÇÃO

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), documento de referência nacional, sistematiza um conjunto de aprendizagens essenciais para todos os alunos da Educação Básica, a fim de que se atinja, entre outros objetivos, uma formação humana com abordagem integral.

Essas aprendizagens essenciais devem contribuir no desenvolvimento de um conjunto de competências gerais, sendo competência definida como:

A mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho. (BRASIL, 2018, p.8)

A BNCC traz, em seu conteúdo, o desafio da implementação da Educação Financeira para a Educação Básica, estabelecendo que os professores devem oportunizar abordagens sobre Educação Financeira, tratando de questões, como, por exemplo: taxas de juros, inflação e rentabilidade. Contudo, uma questão de ordem prática surge: com que instrumentos implementá-la?

Inicialmente, será analisado um caminho fornecido na BNCC, que menciona sobre a Modelagem Matemática no contexto da Educação Matemática para o Ensino Fundamental com a seguinte redação: “Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.” (BRASIL, 2018, p.267).

Assim, a Modelagem Matemática pode ser utilizada como uma importante estratégia para a aplicação de atividades de Educação Financeira no contexto da BNCC. Aliás, as duas possuem um ponto comum de destaque: o “caráter transdisciplinar”.

A Monografia buscará evidências teóricas e empíricas de que a metodologia de Modelagem Matemática para o ensino de matemática (a Modelação Matemática) é um relevante instrumental didático para a “produção de significados” na Educação Financeira em Contextos Escolares (EFCE).

No Trabalho, será considerado o conceito do Livro Aberto do IMPA para Educação Financeira em Contextos Escolares (EFCE), colocado da seguinte forma:

Abrange um processo educativo complexo, desenvolvido a partir de um conjunto de estratégias direcionadas ao ambiente escolar, considerando diversos aspectos: matemáticos, não matemáticos, didáticos e multidisciplinares. (IMPA, 2020, p.1).

Há aspectos matemáticos e não matemáticos da EFCE abordados com Modelagem Matemática. Um exemplo de aspecto matemático é a apresentação de fórmulas de matemática

financeira por “processo construtivo” (construção de fórmulas através da generalização de padrões numéricos).

Já a elaboração de um orçamento familiar e as discussões acerca dos diferentes tipos de previdência no Brasil são exemplos de aspectos não matemáticos da EFCE no âmbito da Modelagem Matemática. Um outro exemplo é a questão atitudinal perante situações reais que envolvam decisões financeiras pessoais com os instrumentos de matemática financeira.

Neste trabalho, tem-se que a Educação Financeira mediada pela Modelagem Matemática (no âmbito da Educação Matemática) centra-se na formação de um aluno crítico, autônomo e reflexivo, inclusive sobre questões transversais à matemática, tendo, assim, competências de interpretação, de compreensão e de ação sobre a sua realidade. Nesta modelagem, o conhecimento se dá através de um processo de construção coletiva.

Na Monografia, diferentes concepções de Modelagem em Educação Matemática serão tratadas na revisão de literatura para reflexão sobre o tema. Neste momento, contudo, será apresentada apenas a definição de Jonei Barbosa: “Modelagem é um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a indagar e/ou investigar, por meio da matemática, situações oriundas de outras áreas da realidade”. (BARBOSA, 2001, p.6)

Essa concepção de modelagem focaliza-se no ambiente escolar e nos alunos, a fim de que tenham um aprendizado mais efetivo, isto é, “com mais significados” sobre um tema específico e de que, adicionalmente, desenvolvam as suas habilidades de “modelação” para outros aprendizados matemáticos, além das modelagens financeiras a serem apresentadas neste trabalho.

Esse autor reforça a constante “atitude de indagação”, que deve estar presente na modelagem para os processos de: busca, seleção, organização e manipulação de informações.

Com tais discussões e reflexões, o trabalho pretende, através dos seus instrumentos metodológicos, esboçar uma proposta pedagógica através da Modelagem Matemática e ainda introduzir sugestões de possíveis atividades didáticas para a implementação da Educação Financeira na Educação Básica.

As atividades serão desenvolvidas com o detalhamento da construção das fórmulas (esboço das provas), bem como a sua manipulação por meio de tecnologias (planilhas, calculadoras ou aplicativos). Na monografia, será apenas utilizado, principalmente, o recurso tecnológico das planilhas.

Objetivo Geral

Apresentar uma proposta metodológica genérica e exemplificar atividades didáticas e exercícios para a implementação da Educação Financeira no Ensino Básico, conforme a BNCC, utilizando, na medida do possível, a Modelagem Matemática na Educação Matemática como instrumento de ensino.

Neste sentido, o trabalho será focado no desenvolvimento de competências e habilidades necessárias ao entendimento do “significado do valor do dinheiro no tempo”, dos fluxos financeiros de financiamentos e investimentos e das diferenças entre juros simples e compostos. Adicionalmente, questões como rentabilidade financeira e inflação poderão ser contextualizadas e trabalhadas.

Objetivos Específicos

- a) Realizar a análise de factibilidade sobre a proposta metodológica deste trabalho, considerando uma amostra de licenciandos em Matemática em uma Oficina realizada nas turmas de Licenciatura do IFRJ (aplicou-se uma de atividade de Matemática Financeira e um questionário com perguntas abertas e fechadas).
- b) Analisar os desafios para alunos e professores em Matemática Financeira com base em avaliações nacionais recentes, especialmente após a vigência da BNCC.
- c) Refletir sobre as formas e os níveis em que a Modelagem Matemática pode servir de suporte para a elaboração de atividades de Educação Financeira.

Metodologias aplicadas

- a) Leitura e análise das fontes bibliográficas sobre Educação Financeira e Modelagem Matemática no âmbito da Educação Matemática e sobre os pontos de interseção entre as duas temáticas.
- b) Análise de questões de Matemática Financeira presentes em exames nacionais recentes.
- c) Utilização das observações da Oficina de Matemática Financeira e dos Questionários elaborados para a Oficina para a focalização nos desafios de uma Matemática Financeira alinhada à BNCC e com abordagem crítica e reflexiva.

1 REVISÃO DE LITERATURA SOBRE MODELAGEM MATEMÁTICA E EDUCAÇÃO FINANCEIRA

1.1 Modelagem Matemática

A Modelagem Matemática no Contexto da Educação Matemática tem o objetivo básico de tornar o conhecimento interessante e útil.

É importante pensarmos a seguinte questão: como a Modelagem Matemática se conecta com a Educação Matemática?

Na perspectiva Freiriana, “o ensino tradicional é o que o professor deposita o conhecimento, sendo o aluno um simples receptor desse conhecimento”. Já a educação transformadora propõe uma reflexão sobre o lugar em que o aluno deve ocupar no processo de aprendizagem.

O movimento de Educação Matemática Crítica do educador matemático Ole Skovsmose surge como alternativa ao ensino tradicional de Matemática por meio de uma interpretação crítica das ideias matemáticas sobre problemas reais.

A Educação Matemática Crítica tem, como foco, a formação cidadã dos alunos. Para tanto, busca a instrumentalização da Matemática, a fim de que se apresentem ferramentas de análise crítica sobre relevantes temáticas sociais. Além disso, potencializa o processo de ensino-aprendizagem através de novas conexões pedagógicas e da introdução de aspectos motivacionais no ambiente escolar.

A Modelagem Matemática se interconecta com a Etnomatemática¹, impactando em uma aprendizagem mais significativa por meio da fixação dos conceitos matemáticos pela aplicabilidade em situações reais, da ênfase na criatividade e autonomia para formulação e resolução de problemas e do aprendizado que engloba as competências de diferentes culturas sociais.

A Modelagem apresenta os seguintes objetivos básicos:

- a) Construção do conhecimento matemático nas diferentes temáticas do currículo escolar.
- b) Desenvolvimento de habilidades e competências para construção de Modelos Matemáticos em geral.
- c) Estruturação de habilidades e competências para desenvolvimento de conhecimentos multidisciplinares de natureza reflexiva e analítica (aplicação de

¹ A Etnomatemática se constitui como um conjunto de formas e percepções da Matemática relativas à realidade de determinados grupos culturais.

tipologias, definição de critérios, aplicabilidade com base em critérios, avaliação de modelos, construção de novas hipóteses, reflexão social, etc.).

As Etapas Básicas de uma atividade de Modelagem Matemática:

- a) Elaboração da Situação-Problema – pode ser feita pelos alunos e pelo professor em conjunto.
- b) Inteiração/Simplificação – os alunos fazem a leitura da atividade, identificam a situação-problema e levantam as hipóteses (transformação da situação-problema da linguagem natural para a linguagem matemática).
- c) Resolução – os alunos apresentam uma solução que responde à atividade proposta por meio da criação de um modelo apropriado (exemplos: fórmula, gráfico, maquete, etc.). Caso não seja possível e/ou factível a construção completa de um Modelo Matemático, pode-se ter também como resultados: possíveis respostas, estimativas futuras, generalizações de problemas semelhantes, etc.
- d) Interpretação/Validação – os alunos analisam a solução apresentada e a comparam com o problema inicial, estando, assim, aptos a responder às seguintes perguntas: Possui validade ou não? É aplicável ou não a um problema real?

Assim, quando testamos, analisamos e validamos um modelo, temos as seguintes perguntas-chave na modelação: Resolveu o problema e é viável? Ainda de precisa de ajuste? Possibilita estimativas futuras? É aplicável a qualquer caso?

Destaca-se que, a partir de uma situação-problema, quando traduzimos a linguagem natural de um problema para linguagem matemática, em geral, temos algum dos seguintes objetivos: estabelecimento de variáveis e expressões algébricas; determinação de constantes e expressões aritméticas; construção de gráficos; esboço e resolução de equações; apresentação de dados através de tabelas; determinação de padrões geométricos; e construção de hipóteses gerais, etc.

Alguns importantes teóricos de Modelagem Matemática, dentre outros, são destacados a seguir, conforme a Tabela 1:

Tabela 1 – Diferentes concepções sobre Modelagem Matemática

AUTOR	Modelagem Matemática
BASSANEZI	"Modelagem Matemática é um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos. (...) Consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual."
BIEMBENGUT	"Arte de expressar por intermédio de linguagem matemática situações-problema de nosso meio (...) processo que envolve a obtenção de um modelo. "
BARBOSA	"Modelagem é um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a indagar e/ou investigar, por meio de matemática, situações oriundas de outras áreas da realidade."

FONTE: Acervo do autor (elaboração própria).

Segundo Bassanezi (2002), Modelagem Matemática é uma estratégia utilizada para obtenção de alguma explicação ou entendimento de determinadas situações reais. Neste sentido, a Modelagem transforma problemas da realidade em problemas matemáticos e os resolve, interpretando as suas soluções na linguagem do mundo real.

O ensino por intermédio da Modelagem contrapõe-se ao modelo de ensino tradicional focado em teorias matemáticas vistas e ensinadas como processos acabados, completos e “descobertos” por matemáticos profissionais. Assim, com a Modelagem todos podem “fazer Matemática” e realizar descobertas úteis no processo de ensino-aprendizagem da Matemática.

Esse modelo de ensino mais tradicional, em muitos casos, implica em um ensino desconectado da realidade e com poucas reflexões sobre o processo histórico de construção da Matemática.

Para Bassanezi (2002), “Modelo Matemático é um conjunto de símbolos e de relações matemáticas que representam, de alguma forma, o objeto estudado, sendo a Modelagem um processo dinâmico, utilizado para a obtenção e a validação de modelos matemáticos”.

Este autor afirma que a modelagem eficiente permite fazer previsões, tomar decisões, explicar e entender certos aspectos analisados com foco na participação ativa no contexto do mundo real.

Para ele, o processo de ensino-aprendizagem não se dá apenas do professor para o aluno, pois há a interação do aluno com seu ambiente natural através da Modelagem. É importante ressaltar que a Modelagem apresenta o potencial de despertar o interesse e o conhecimento dos alunos, auxiliando-os na estruturação das suas formas de agir e pensar.

Enfatiza que não existem modelos definitivos, pois eles podem sempre ser melhorados, já que a modelagem é um processo, pressupondo a união de teoria e prática. Diz ainda que, quando oportunizamos problemas sob a ótica da modelagem, temos a chance de gerarmos significado para os conteúdos trabalhados em sala de aula, inclusive quando mesclamos as aplicações matemáticas a eventuais aspectos lúdicos que possam ser apresentados em aula.

Essa metodologia motiva o seu usuário a buscar o entendimento racional sobre a realidade que o cerca e a selecionar os meios para agir sobre ela e para, eventualmente, transformá-la.

Assim, Bassanezi (2002) reforça a importância do conhecimento das ideias gerais do *Discurso do Método* de René Descartes, elaborado no ano de 1637, para um melhor entendimento sobre a aplicação da Modelagem Matemática, na qual o pensamento cartesiano é, particularmente, útil.

Na modelagem, deve-se ter em mente que estamos trabalhando com aproximações da realidade, ou seja, realizam-se representações de um sistema ou parte dele e a obtenção do modelo matemático pressupõe a existência de um dicionário que interpreta, sem ambiguidades, os símbolos e as operações de uma teoria matemática. Neste sentido, há um processo de intermediação de um problema original para um modelo matemático construído.

Bassanezi (2002) defende ainda uma possibilidade de ensino que, em certas circunstâncias, pode potencializar a aprendizagem: trata-se do ensino na ordem inversa à usual em que se conclui um enunciado de uma teoria somente ao fim, conforme o esquema a seguir: *Aplicações → Demonstração (Esboço) → Enunciado (Resultado)*.

Isso porque, partindo de aplicações sem grande complexidade, a possibilidade de retenção do conhecimento (por meio de descobertas matemáticas individuais e coletivas) tende a ser maior, pois o “saber matemático” é construído, desde o início, já com a resposta do: “para que isso serve?”. Nesta sequência, esboçando ideias e pequenas demonstrações, pode-se formalizar, em um processo construtivo, os resultados finais de uma Teoria Matemática.

Segundo Bassanezi (2002), as atividades intelectuais para a Modelagem Matemática são as seguintes:

- 1) **Experimentação**: é uma atividade, essencialmente, laboratorial em que se processa a obtenção de dados. Os métodos experimentais são quase sempre determinados pela natureza do experimento e o objetivo da pesquisa.
- 2) **Abstração**: é o procedimento que deve levar à formulação de Modelos Matemáticos. Nesta fase, busca-se estabelecer: a) seleção de variáveis; b) formulação de problemas

teóricos em uma linguagem própria da área estudada; c) formulação de hipóteses; e d) simplificação.

- 3) **Resolução**: o Modelo Matemático é obtido com a substituição da linguagem natural, presente nas hipóteses, por uma linguagem matemática consistente.
- 4) **Validação**: é o processo de aceitação ou não do modelo proposto neste processo.
- 5) **Modificação**: é a etapa de ajuste de certos fatores do problema original, os quais podem impactar na rejeição ou na aceitação dos modelos.

Os argumentos utilizados por Bassanezi (2002) para a implantação da Modelagem Matemática em sala de aula são:

- a) Focaliza a preparação dos estudantes para a vida real como cidadãos atuantes na sociedade.
- b) Indica que o conhecimento matemático pode tornar o estudante apto a utilizar a matemática como ferramental para a resolução de problemas em diferentes situações e áreas do conhecimento.
- c) Proporciona ao aluno uma melhor compreensão sobre os argumentos matemáticos e ainda busca tornar mais eficiente a retenção dos conceitos envolvidos.
- d) Tem potencial de gerar, nos alunos, a valorização e o gosto pela Matemática.
- e) Permite a aproximação da Matemática com a realidade do aluno (o aluno traz consigo o seu conhecimento de vida e que pode ser aplicado livremente nas aulas).
- f) O entendimento, com a prática, de que a atividade de aplicação do conhecimento matemático é intrínseca à Matemática como se observa na História da Matemática².
- g) Desconstrução de certas ideias difundidas sobre a Matemática de que a sua importância se estabelece, simplesmente, através de conceitos e definições arbitrários e formais, que, no futuro, terão a sua explicação e/ou aplicação.

Contudo, destaca algumas questões que, potencialmente, podem gerar um certo nível de obstaculização da Modelagem Matemática em sala de aula:

- a) O currículo deve ser integralizado e a aplicação de um conjunto razoável de atividades de Modelagem pode, eventualmente, prejudicar esta integralização, pois as aulas com modelagem têm um processo que demanda mais tempo que as aulas tradicionais. Assim,

² Na História da Matemática, muitas teorias matemáticas foram motivadas e originaram-se de problemas práticos, contribuindo para o desenvolvimento científico de diversas civilizações, tais como: a egípcia, a babilônica e a grega, entre outras.

deve-se priorizar a Modelagem para assuntos focais, conforme a estratégia de atuação docente.

- b) Muitos professores desconhecem e/ou tem pouca habilidade com esta prática de ensino. O treinamento realizado com cursos de Modelagem Matemática e de Resolução de Problemas pode reduzir este obstáculo.
- c) Os conhecimentos teóricos construídos com as situações práticas podem não ser os esperados, dada a formação heterogênea das turmas e o nível diferenciado de interesse dos alunos sobre alguns temas classificados como de interesse geral.
- d) A atuação multidisciplinar do professor de Matemática ser alvo de questionamentos de muitos docentes da área, que entendem não ter o papel de atuarem, em sala de aula, na resolução de problemas com aspectos extramatemáticos. Ressalta-se que as atividades de Modelagem são fortemente relacionadas ao seu caráter multidisciplinar.

Conforme o entendimento de Biembengut e Hein (2005, p.12-13), “Modelagem Matemática é um processo que envolve a obtenção de um modelo por meio da interligação da Matemática com a realidade”. Segundo os autores, os modeladores precisam boa dose de intuição e criatividade para adaptação aos contextos e às realidades apresentados.

Estes teóricos defendem que a Modelagem pode representar um caminho de despertar intelectual nos alunos por tópicos matemáticos ainda desconhecidos e, além disso, tem potencial de desenvolver importantes competências e habilidades aplicáveis à “tarefa de modelar”.

Afirmam ainda que esta metodologia requer uma mudança em relação ao ensino tradicional, no qual o professor é o centro do processo e o aluno é apenas passivo ou reativo. Na Modelagem, a situação-problema deve ser resolvida e entendida e, se necessário, modificada. A correta interpretação da solução possibilita a validação dos modelos construídos.

Conforme Biembengut e Hein (2005):

Um modelo pode ser originado através de aproximações desenhadas para o entendimento e síntese de determinados fenômenos, sendo também representativo da realidade e expresso por variados tipos de formulações, como, por exemplo: expressões numéricas ou algébricas, diagramas, gráficos, equações, figuras geométricas, aplicativos, etc.

Estes autores dividem a atividade de Modelagem nas seguintes etapas básicas:

- 1) **Interação** – reconhecimento da situação-problema e familiarização com o assunto a ser modelado (realização de pesquisa).
- 2) **Matematização** – formulação (construção da hipótese) e entendimento e resolução dos aspectos matemáticos do problema objeto da modelagem.
- 3) **Modelo Matemático** – discussão e interpretação da solução apresentada para a modelagem e validação em relação à utilização do modelo, ou seja, observação do seu uso na prática.

Ainda segundo Biembengut e Hein (2005):

Ressaltam que a promoção do conhecimento matemático, em diversas situações, não considera a apreensão dos significados para os alunos, a partir dos conhecimentos introduzidos, tanto do ponto de vista da teoria matemática como da natureza dos problemas. A Modelagem Matemática tem buscado soluções para mitigar este problema de natureza pedagógica.

Barbosa (2001, p.6) introduz o entendimento da “Modelagem como um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a indagar e/ou investigar, por meio da matemática, situações oriundas de outras áreas da realidade.”

Assim, ele concebe a Modelagem Matemática como uma oportunidade para os alunos indagarem e explorarem diferentes situações reais por meio da Matemática, sem que, para isso, sejam fixados certos procedimentos e/ou conteúdos prévios.

Com isso, as ideias e os conceitos matemáticos tendem a fluir mais naturalmente por intermédio do desenvolvimento de atividades estrategicamente planejadas e selecionadas.

Essa concepção de Modelagem, no âmbito da educação matemática, tem importante contribuição, pois não se focaliza e nem se restringe aos conteúdos programáticos e nem à habilidade de construção de modelos e, desta forma, introduz a Modelagem como uma prática mediadora de ensino.

Destaca a importância de que o professor, os alunos e o ambiente de modelagem se integrem com o objetivo de tornar possível uma construção conjunta de conhecimentos mediante um processo de constante diálogo.

Os processos de busca, seleção, organização e manipulação de informações na Modelagem são obtidos através da “*atitude de indagação*”, requerida dos alunos para o desenvolvimento das atividades de Modelagem, conforme a abordagem defendida por Barbosa (2001).

Conforme apresentado por Barbosa (2001), as tarefas no processo de Modelagem podem ser divididas nas seguintes etapas e casos como detalhado na Figura 1:

Figura 1 – O aluno e o professor - Modelagem

	Caso 1	Caso 2	Caso 3
<i>Elaboração da situação-problema</i>	professor	professor	professor/aluno
<i>Simplificação</i>	professor	professor/aluno	professor/aluno
<i>Dados qualitativos e quantitativos</i>	professor	professor/aluno	professor/aluno
<i>Resolução</i>	professor/aluno	professor/aluno	professor/aluno

FONTE: BARBOSA (2001).

No CASO 1, o professor apresenta a descrição de uma situação-problema com as informações necessárias à resolução do problema proposto para os alunos se envolverem no processo de resolução.

Já no CASO 2, o professor introduz, em sala de aula, um problema de outra área da realidade, a fim de que os alunos colem as informações para sua resolução e se envolvam neste processo.

E, por fim, no CASO 3, considerando também temas não matemáticos, os alunos formulam e resolvem os problemas por eles propostos, sendo responsáveis pela coleta de informações e ainda pela simplificação das situações-problema.

Burak, em sua tese, introduz a seguinte definição: “Modelagem Matemática é um conjunto de procedimentos cujo objetivo é construir um paralelo para tentar explicar, matematicamente, os fenômenos presentes no cotidiano do ser humano, ajudando-o a fazer previsões e a tomar decisões.” (KLÜBER; BURAK, 2008)

Esta definição trouxe uma “espécie de transposição” da modelagem tradicional, geralmente associada às ciências naturais, a fim de instrumentalizá-la para a aplicação aos ambientes escolares.

Assim, a Modelagem Matemática para a Escola Básica pode ser entendida como uma metodologia de ensino mais aberta e contextualizada e com potencial de proporcionar aos alunos significados mais amplos e em outras perspectivas sobre os assuntos estudados.

Segundo Klüber e Burak (2008), as aulas mediadas pela Modelagem Matemática, em geral, não obedecem a uma sequência rígida de conteúdos, já que estes devem se desenvolver com base nos interesses dos grupos formados e/ou na necessidade de utilização de novos ferramentais matemáticos para a resolução de problemas.

Os autores, conforme a sua perspectiva teórica, definem as seguintes 5 etapas para a Modelagem Matemática: 1) Escolha do tema; 2) Pesquisa exploratória; 3) Levantamento dos problemas; 4) Resolução dos problemas e desenvolvimento do conteúdo matemático no contexto do tema; e 5) Análise crítica das soluções.

Já Almeida *et al.* (2012) caracterizam e conceitualizam as atividades de Modelagem por meio de um fluxo em que se descreve uma problemática (situação inicial) até a sua resolução, ou seja, até uma situação final desejada (solução da problemática), devendo ser detalhados o conjunto de procedimentos e de conceitos para se passar da situação inicial para a final.

Através deste fluxo, tanto a realidade (origem da situação inicial) como a Matemática (conjunto de conceitos e técnicas) subsidiam a produção e a integração dos conhecimentos matemáticos e não matemáticos utilizados.

Denomina-se situação-problema a essa situação inicial: a problemática; à situação final, associa-se uma representação matemática: um modelo matemático. O termo “problema” representa uma situação que, *a priori*, não possui esquemas prévios para a sua solução. Deste modo, para a resolução de situações-problema não existem soluções e/ou procedimentos conhecidos.

Segundo esta perspectiva, os procedimentos na modelagem envolvem o levantamento de informações e o uso de conceitos matemáticos e extramatemáticos para obtenção de um Modelo Matemático. Os modelos podem ser de diferentes naturezas: demonstrativos (como uma maquete), descritivos (para descrição de certos fenômenos) e pedagógicos (para auxiliar na ilustração de um conceito).

Neste sentido, entende-se “um modelo como um sistema conceitual, descritivo ou explicativo, expresso por meio de uma linguagem ou uma estrutura matemática e que tem por finalidade descrever ou explicar o comportamento de outro sistema.” (ALMEIDA *et al.*, 2012)

Assim, pode-se dizer que um Modelo Matemático é uma representação simplificada da realidade sob a ótica daqueles que a investigam. Em linhas gerais, Modelo Matemático é o objetivo e dá “forma” à solução do problema e a Modelagem é o caminho a ser percorrido.

Segundo Almeida *et al.* (2012), as atividades de modelagem envolvem as seguintes fases estruturantes (não necessariamente apresentadas linearmente):

- 1) **Inteiração** – trata-se do primeiro contato com uma situação-problema para conhecimento de suas características e especificidades através da coleta de dados quantitativos e qualitativos. Nesta etapa, escolhe-se um tema, buscam-se informações sobre este tema e, assim, formula-se um problema e se estabelecem metas para a sua resolução.

- 2) **Matematização** – após a estruturação e a identificação da situação-problema na fase de inteiração (apresentada em linguagem natural), há a necessidade de transformação de uma representação para outra (linguagem natural $\rightarrow$ linguagem matemática). A linguagem matemática torna evidente o problema matemático a ser resolvido, sendo formuladas hipóteses, selecionadas variáveis e realizadas simplificações de informações obtidas na fase de inteiração.
- 3) **Resolução** – é a construção de um modelo matemático com a finalidade de descrever uma situação-problema para a análise dos seus aspectos mais relevantes, bem como para a obtenção de respostas às perguntas iniciais.
- 4) **Interpretação de resultados e validação** – a interpretação das respostas para os problemas proporciona meios para a validação das representações matemáticas. Com a construção e a aplicação dos modelos, focaliza-se agora na avaliação dos processos de construção dos modelos e suas aplicações.

Almeida *et al.* (2012) destacam a importância da pesquisa em Educação Matemática para o desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática em ambientes escolares da Educação Básica. Argumentam, favoravelmente à Modelagem Matemática por meio dos seguintes pontos:

- a) Envolve um conjunto de ações cognitivas do indivíduo.
- b) Inclui representação e manipulação de objetos matemáticos.
- c) Possui direcionamento a objetivos e metas estabelecidas pelos alunos.

Estes autores destacam que a compreensão de uma situação-problema através da Matemática depende de interpretações matemáticas estruturadas por meio de conhecimentos e habilidades dos alunos, que podem servir, por exemplo, para identificação de relações e de regularidades e ainda de comparações e de generalizações, etc.

Almeida *et al.* (2012) sustentam que, em uma atividade de modelagem, desenvolvem-se as capacidades comunicativa e argumentativa dos alunos, pois, geralmente, realizam exposições fundamentando as soluções no contexto da modelagem.

Defendem ainda a utilização de recursos computacionais e de calculadoras para que estas tecnologias fomentem o desenvolvimento de um aluno com pensamento crítico e autônomo a partir da utilização destes recursos no ambiente escolar.

Destaca-se que Almeida *et al.* (2012) apontam as seguintes conexões entre a Modelagem Matemática e a teoria sobre o conhecimento crítico e reflexivo do autor Ole Skovsmose:

- a) A dimensão reflexiva do conhecimento relaciona-se com a capacidade de interpretação e ação direcionada a uma situação social e política com o respaldo no conhecimento matemático.
- b) Na abordagem crítica e reflexiva da Modelagem Matemática, discute-se: a natureza do modelo; as suas implicações sociais; e o desenvolvimento de habilidades avaliativas para o modelo.

Apresentam também algumas conexões entre a Modelagem Matemática e a teoria sobre aprendizagem significativa do autor David Ausubel:

- a) Por esta teoria, deve-se partir dos “conhecimentos prévios” (o que o aluno já sabe ou deveria saber) para as novas situações de aprendizagem que surgem nas aulas.
- b) Uma atividade de Modelagem Matemática pode reforçar os seguintes aspectos da aprendizagem significativa: i) desenvolvimento de tarefas que apresentem novas informações ou com as quais os alunos não estejam familiarizados; e ii) os alunos devem estar motivados para a aprendizagem ser significativa.

O teórico Ademir Caldeira enfatiza o seguinte ponto:

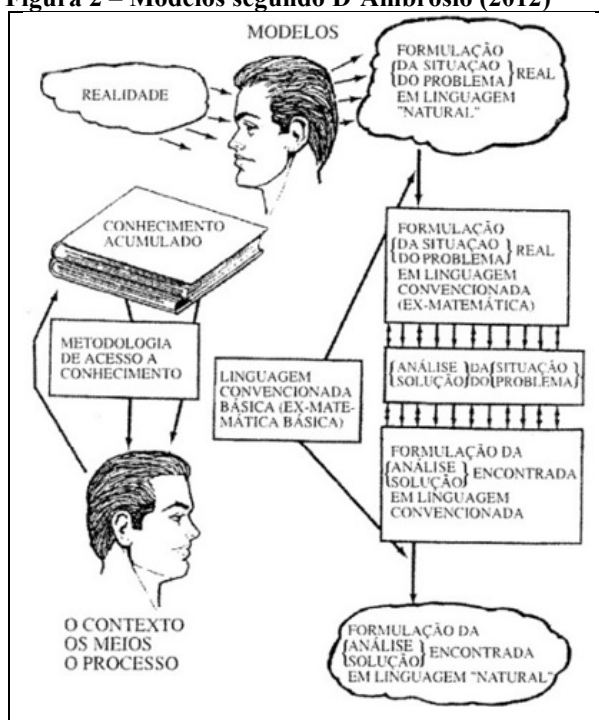
A Modelagem tem sempre, como objeto de trabalho, problemas da realidade, não admitindo, assim, “problemas inventados”. Ele compreende a modelagem, pensando-a como advinda de projetos, sem a preocupação de reproduzir os conteúdos colocados no currículo, mas observando os conceitos universais da matemática. (KLÜBER; BURAK, 2008)

No âmbito educacional, Klüber e Burak (2008, p.26) afirmam que o autor Ademir Caldeira possui a visão de que a “Modelagem Matemática se constitui como um poderoso instrumento de crítica em função das diversas aplicações matemáticas na vida das pessoas”. Os assuntos tratados na Matemática Financeira ilustram, adequadamente, esta perspectiva da modelagem.

“Conforme Caldeira, a atividade de modelagem, concebida como um *sistema de aprendizagem*, possibilita que professores e alunos questionem o formato atual da educação, reconhecendo a realidade como um processo dinâmico e oportunizando discussões sobre a forma estática de concepção dos currículos escolares.” (KLÜBER; BURAK, 2008, p.26)

D'Ambrosio (2012) defende que a utilização de Modelos Matemáticos aplicados à educação, geralmente, depende do desenvolvimento de uma matemática experimental intermediada por projetos modelados em grupos de alunos e organizados como na Figura 2:

Figura 2 – Modelos segundo D’Ambrosio (2012)



FONTE: D'AMBROSIO (2012).

Considerando as várias definições apresentadas, podemos dizer que a Modelagem Matemática, no contexto da Educação Matemática, é uma “estratégia pedagógica” para a tradução das situações cotidianas para a linguagem matemática. Além disso, a BNCC destaca a importância da Modelagem e da Resolução de Problemas cotidianos e sociais como uma das competências específicas para o Ensino Básico.

1.2 Matemática Financeira e Educação Financeira

Como mencionado no Capítulo 1, utilizaremos a definição do Livro Aberto do IMPA para Educação Financeira em Contextos Escolares (EFCE):

Abrange um processo educativo complexo, desenvolvido a partir de um conjunto de estratégias direcionadas ao ambiente escolar, considerando diversos aspectos: matemáticos, não matemáticos, didáticos e multidisciplinares” (IMPA, 2020).

Segundo a OCDE (2009, p.20-21, tradução nossa), deve-se “facilitar o acesso a informações úteis para o gerenciamento de recursos financeiros pessoais dos cidadãos, bem como aprimorar ações de educação financeira em escolas de ensino fundamental e médio e em programas de formação de adultos.”

O Brasil, atualmente, possui um Programa de Educação Financeira nas Escolas no âmbito da Estratégia Nacional de Educação Financeira e, recentemente, incluiu a Educação Financeira como tema transversal na BNCC.

Conforme o Banco Mundial:

A Educação Financeira pode abranger conceitos que vão desde a conscientização e os conhecimentos financeiros, inclusive sobre produtos financeiros, instituições e conceitos; Habilidades financeiras, como a capacidade de calcular pagamentos com juros compostos; e capacidade financeira em termos mais gerais, como na gestão de dinheiro e planejamento financeiro.” (XU; ZIA, 2012, p.2, tradução nossa)

Assim, a Educação Financeira deve abranger temas (antes não ensinados ou pouco enfocados) como: taxas de juros, inflação, aplicações financeiras (rentabilidade e liquidez de um investimento) e impostos.

O Banco Central do Brasil (BCB) elaborou um aplicativo denominado *Calculadora do Cidadão*³ (detalhada no APÊNDICE A) para simulação de situações sobre o cotidiano financeiro dos brasileiros, a fim de instrumentalizá-los sobre questões financeiras.

Realizando um exame mais detalhado da BNCC, ressaltam-se algumas, dentre as habilidades previstas para o Letramento Matemático do Ensino Fundamental:

- a) (EF07MA02) Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, como os que lidam com acréscimos e decréscimos simples, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, no contexto de educação financeira, entre outros; e
- b) (EF09MA05) Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com a ideia de aplicação de percentuais sucessivos e a determinação das taxas percentuais, preferencialmente com o uso de tecnologias digitais, no contexto da educação financeira.

O professor de Matemática deve buscar nas suas aulas, na medida do possível, o desenvolvimento de competências e de habilidades nos alunos para poderem exercer plenamente a sua Cidadania. E, conforme esta perspectiva, deve fomentar o desenvolvimento de habilidades financeiras nos seus alunos para a aplicação da Matemática Financeira em diferentes contextos.

³ Disponível em: <<https://www.bcb.gov.br/acessoinformacao/calculadoradocidadao>>. Há também uma versão para aplicativos (disponibilizada gratuitamente) para utilização em smartphones e em tablets, podendo ser obtida em: <<https://www3.bcb.gov.br/CALCIDADAO>>.

A Matemática Financeira tem o seu papel acadêmico no que se refere ao correto entendimento do valor do dinheiro no tempo e da aplicação de equivalências financeiras. Mas tem ainda o seu papel social na medida em que contribui para o exercício da cidadania dos indivíduos.

Assim, a introdução de conceitos de Matemática Financeira deve conter aspectos matemáticos e não matemáticos da Educação Financeira mediados pela Modelagem Matemática no contexto da Educação Matemática.

Sabe-se que a modelagem busca também despertar o interesse os alunos, pois as atividades escolares desenvolvidas na perspectiva da Modelagem Matemática têm uma abordagem mais contextual e significativa e desenvolvem habilidades investigativas nos alunos.

Os professores devem buscar a internalização de uma “Matemática Financeira Crítica” em suas aulas por meio da criação de significados para os conteúdos escolares e focalização nas competências para o exercício da cidadania e também no cotidiano dos alunos através de atividades de modelagem construídas, convenientemente, para a exploração de certos porquês da Matemática Financeira e de reflexões pessoais sobre eventuais escolhas financeiras.

Conforme a tese desenvolvida pelo professor Ilydio:

Existem, basicamente, duas grandes vertentes de ensino da Matemática. Para alguns, ensinar Matemática é a busca do rigor, é o uso e a descrição de algoritmos e fórmulas e problemas de aplicação. De acordo com essa concepção, normalmente, não há qualquer tipo de discussão sobre por que e para que se aprende Matemática. Para outros, o ensino da Matemática está preocupado com o desenvolvimento de conteúdos matemáticos contextualizados, respeitando diversidades, estimulando a investigação e o espírito crítico do aluno/cidadão. É nessa perspectiva que se justifica a ligação entre a Matemática Financeira e a Educação Matemática Crítica (SÁ, 2012, p. 31).

Neste sentido, em uma atividade de Modelagem, espera-se mais do que o aprendizado de fórmulas e sim a sua correta compreensão e interpretação. No caso da Matemática Financeira, os processos pedagógicos podem ser desenvolvidos com fórmulas, planilhas e simuladores financeiros para realização de aproximações e validações dos modelos coletivamente construídos.

Na Modelagem Matemática para a Matemática Financeira, deve-se realizar a correta interpretação dos fluxos de valor ao longo do tempo, associando-os ao conceito de Valor Presente (VP) e de Valor Futuro (VF).

A Matemática Financeira, basicamente, depende do correto entendimento dos seguintes conceitos-chave:

- I) Utilização de Fatores de Correção: para Valor Futuro $(1 + i)^n$ e para Valor Presente $(1 + i)^{-n}$ nos sistemas de capitalização composta (regra geral).
- II) Entendimento do valor do dinheiro no tempo e dos deslocamentos dos fluxos financeiros.
- III) Aplicação das equivalências de capitais com manipulação de expoentes fracionários e/ou negativos.
- IV) Reconhecimento de situações financeiras que abrangem séries de Capitais, bem como interpretação e aplicação correta das fórmulas delas decorrentes.
- V) Reconhecimento dos casos específicos em que se deve realizar a capitalização a juros simples.

Deve-se observar sobre os investimentos e os financiamentos, as suas caracterizações e as suas diferenças em termos de fluxos financeiros, considerando ainda questões comportamentais relacionadas aos atos “investir e/ou contrair dívidas”.

Na Escola Básica, normalmente, ensina-se Juros Simples no Ensino Fundamental e Compostos no Ensino Médio. Como a passagem de um conteúdo para o outro pode ser superior a três anos, a ideia de Juros Simples associada ao conceito de Juros pode gerar um problema conceitual aos alunos, já que a grande maioria das situações do cotidiano relaciona-se a modelos de capitalização composta.

Assim, no âmbito de uma investigação financeira, deve-se, na medida do possível, priorizar a intuição dos “Juros sobre Juros” (Juros Compostos) em contraposição aos Juros sobre um valor fixo (Juros Simples).

Na tese do Professor Ilydio (SÁ, 2012) desenvolveu-se uma pesquisa sobre a Matemática Financeira no contexto dos cursos de Licenciatura em Matemática no Brasil. Assim, realizou-se uma análise sobre o currículo formal dos licenciandos em relação à disciplina de Matemática Financeira, segundo uma perspectiva de análise crítica e reflexiva, procurando verificar ainda a contextualização e a conexão das atividades propostas na disciplina com o cotidiano dos alunos.

A referida tese apresentou a seguinte hipótese norteadora, confirmada pelas conclusões da pesquisa:

A disciplina de Matemática Financeira não consta em grande parte das matrizes curriculares das Licenciaturas em Matemática e, quando consta,

possui um enfoque muito técnico, com priorização de fórmulas e pouca ênfase na contextualização e no cotidiano dos alunos. (SÁ, 2012, p.28)

O autor justificou a escolha do tema pelo fato da Matemática Financeira ter presença diária na vida das pessoas e por ter grande potencial de realização de conexões com outros temas da Matemática, tais como: progressões, funções e logaritmos.

Ilydio defende que a Matemática Financeira possui um papel significativo no desenvolvimento da capacidade de interpretação e de percepção da Matemática no cotidiano das pessoas. (SÁ, 2012)

Ressalta ainda que a formação dos professores é um dos problemas da Matemática Financeira e afirma que uma formação adequada de professores de Matemática na disciplina de Matemática Financeira tem grande potencial de levá-los a conduzir aulas contextualizadas e com impactos positivos na formação de alunos críticos e autônomos, de modo que os estudantes deixem de ser simples reprodutores de informações (fórmulas e algoritmos).

Para Ilydio (SÁ, 2012), a ligação entre a Matemática Financeira e a Educação Matemática Crítica (entendida como Matemática Financeira Crítica) ocorre quando os seguintes eixos fundamentais são, nitidamente, percebidos durante as atividades propostas:

- I) Construção de conhecimentos.
- II) Estímulo à capacidade investigativa.
- III) Contextualização dos conteúdos.
- IV) Estímulo às interações sociais.
- V) Respeito à diversidade.

Em relação aos livros didáticos da Escola Básica, a sua pesquisa aponta para o seguinte diagnóstico:

Apresentam, de forma geral, uma abordagem superficial para a Matemática Financeira e, geralmente, não a trabalham de forma contextualizada e não exploram importantes conceitos da Matemática Financeira como: capitalização, ganho real, inflação, taxa nominal, taxa efetiva e perda salarial. (SÁ, 2012, p.81)

Segundo Ilydio, a Matemática Financeira possui dois pilares: *fatores de correção e valor do dinheiro no tempo* (SÁ, 2012, p.88). Assim, sem o uso de fórmulas e com esses dois conceitos, pode-se, segundo o autor, resolver, praticamente, todas as questões que envolvem a matemática.

Em uma aula sobre Juros, os seguintes aspectos são fundamentais para o desenvolvimento de uma atividade de Modelagem Matemática:

- Qualquer deslocamento do dinheiro no tempo pressupõe uma *taxa de juros* associada. Assim, para movermos o dinheiro no tempo de um período 1 para um período 2, temos que, necessariamente, explicitar a taxa de juros envolvida.
- É importante fixar o conceito de que, quando um indivíduo cede dinheiro no tempo para outro indivíduo, ele o faz por meio de uma expectativa de recebimento de *aluguel do dinheiro*, denominado *juros*. O dinheiro deverá ser devolvido e os juros (o aluguel) deverão ser pagos, mas é importante perceber que esta operação sempre envolve algum risco de não pagamento. Conforme se eleve a probabilidade desse risco, as taxas de juros se elevarão também.
- Os juros são calculados, genericamente falando, considerando um valor para o qual o dono do dinheiro estaria disposto a emprestá-lo, considerando que ele poderia investir o seu dinheiro de outra forma e que conhece os riscos de não pagamento associados.
- Um fato importante é que quem recebe o dinheiro emprestado antecipa a realização de necessidades que só seriam realizadas no futuro (*trocias intertemporais*).

1.2.1 Caracterização e reconhecimento dos regimes de capitalização

No regime de *Juros Simples*, um Capital Inicial C_0 , a uma taxa de juros i^4 , é aplicado em n períodos com o seguinte acréscimo a C_0 :

$$J = \underbrace{C_0 \cdot i + C_0 \cdot i + \dots + C_0 \cdot i}_{n \text{ unidades de tempo}} = C_0 \cdot i \cdot n$$

O Montante (ou total) é dado por: $M = C_0 + C_0 \cdot i \cdot n = C_0 \cdot (1 + i \cdot n)$

No regime de *Juros Compostos*⁵, um Capital Inicial C_0 , a uma taxa de juros i , é aplicado em n períodos, gerando, conforme um processo iterativo, o Montante a seguir:

$$\begin{aligned} t = 0 &\rightarrow M = C_0 \\ t = 1 &\rightarrow M = C_0 \cdot (1 + i) \\ t = 2 &\rightarrow M = [C_0 \cdot (1 + i)] \cdot (1 + i) \\ &\vdots \end{aligned}$$

⁴ Uma taxa de juros i deve ser sempre expressa através de um percentual por unidade de tempo $\left(\frac{\%}{\text{unidade de tempo}}\right)$ e o prazo deve ser fornecido nesta unidade de tempo para o cálculo dos juros, sejam eles simples ou compostos.

⁵ Os juros compostos são os mais utilizados no dia a dia e quando falamos, genericamente, sobre juros, estamos nos referindo aos compostos. Os juros simples são aplicados em situações mais restritas ou específicas, como as dos juros de mora e as dos descontos bancários.

$$t = n \rightarrow M = [C_0 \cdot \underbrace{(1+i) \dots (1+i)}_{n-1 \text{ vezes}}] \cdot (1+i) = C_0 \cdot (1+i)^n$$

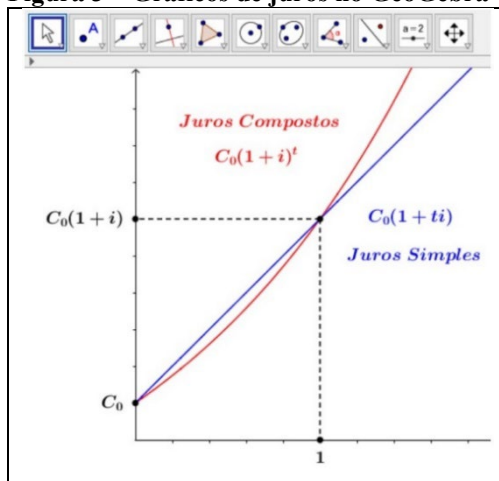
$$M = C_0 \cdot (1+i)^n \text{ e } J = C_0 \cdot [(1+i)^n - 1]$$

Conforme Morgado *et al* (2015, p. 67):

Na vida real os juros simples são raramente usados, haja vista que é de interesse dos detentores do capital que os juros sejam compostos, pois, em geral, montantes a juros compostos são maiores que os montantes a juros simples. A exceção a isso ocorre apenas no caso em que o prazo é menor que a unidade de tempo e, nesta situação, os juros simples gerariam montantes superiores aos juros compostos.

A Figura 3 ilustra esta exceção mencionada:

Figura 3 – Gráficos de juros no GeoGebra



FONTE: Acervo do autor (elaboração própria).

Esta situação, dos juros simples resultarem montantes maiores na vida real, pode ser exemplificada com o caso dos juros de mora (juros simples cobrados dos devedores por pequenos atrasos de pagamento). Situação real – uma conta de luz no valor de R\$ 120,00 foi paga com atraso de 10 dias. Sendo a taxa de juros de 1% ao mês, o montante M pago por conta desse atraso será de $M = 120 + 120 \cdot \left(\frac{0,01}{30}\right) \cdot 10 = 120,40$.

Em relação aos juros compostos, Morgado *et al* (2015, p.67-68) apresentam o seguinte exemplo, comentando sobre os 3 diferentes modos de resolvê-lo: “Qual é o montante de um principal de R\$ 520,00, a 6% ao mês, em 3 meses e 10 dias?”

Quando os detentores do capital nos pagam juros, como no exemplo da Caderneta de Poupança, eles levam em conta apenas 3 meses, pois somos remunerados com os juros só nas datas de aniversário da Poupança, que ocorrem a cada 30 dias. Assim, se decidirmos registrar o valor em 3 meses e 10 dias, recebemos nesta data o montante $M = 520 \cdot (1 + 0,06)^3 = 619,33$. Logo, o resgate no 4º mês seria mais oportuno. (MORGADO *et al*, 2015 com adaptações)

Todavia, quando nós pagamos juros aos detentores do capital, somos cobrados também em relação ao período referente aos dias do exemplo apresentado. Neste caso, o cálculo do montante pode ser feito por meio de duas convenções: a) convenção exponencial; e b) convenção linear.

No exemplo, utilizando a convenção exponencial, realiza-se a seguinte conta para o cálculo do montante $M = 520 \cdot (1 + 0,06)^{3+\frac{10}{30}} = 631,48$.

Já considerando a convenção linear para o mesmo exemplo, temos o seguinte cálculo do montante $M = \underbrace{520 \cdot (1 + 0,06)^3}_{= 619,33} \cdot \underbrace{\left[1 + 0,06 \cdot \left(\frac{10}{30}\right)\right]}_{= 1,02} = 631,72$.

Convém ressaltar que, normalmente, quando os detentores do capital nos cobram juros, utilizam a convenção linear porque gera montantes maiores do que a exponencial. Na vida real, por exemplo, os bancos realizam este cálculo pela convenção linear quando pagamos contas em atraso como o caso apresentado dos juros de mora.

Observe que os montantes calculados no exemplo para as duas convenções têm o prazo com uma parte inteira e outra fracionária. Desta forma, pode-se apresentar o seguinte detalhamento, considerando as propriedades da potenciação:

a) Convenção exponencial

$$M = 520 \cdot (1 + 0,06)^{3+\frac{10}{30}} = \underbrace{520(1 + 0,06)^3}_{= 619,33} \cdot \underbrace{(1 + 0,06)^{\frac{10}{30}}}_{= 1,019613} = 631,48$$

b) Convenção linear

$$M = \underbrace{520 \cdot (1 + 0,06)^3}_{= 619,33} \cdot \underbrace{\left[1 + 0,06 \cdot \left(\frac{10}{30}\right)\right]}_{= 1,02} = 631,72$$

Logo, o cálculo pela convenção linear com prazos fracionários gera sempre os maiores montantes.

A explicação é a seguinte: para efeito de cálculo, esses prazos fracionários podem ser subdivididos em duas partes: a primeira em que o prazo é maior ou igual a uma unidade de tempo e é representado por valores inteiros; e a segunda em que é inferior a uma unidade de tempo, sendo representado por uma fração entre 0 e 1.

Na primeira, o cálculo é igual. Na segunda, o cálculo é diferente: na convenção linear utilizam-se os juros simples e na convenção exponencial os juros compostos. Como, exatamente, na situação em que o prazo é inferior a uma unidade de tempo que os juros simples têm os maiores montantes, pode-se verificar com o exemplo dado⁶ que, na convenção linear, a parte fracionária dos prazos aumenta os valores dos montantes em relação à convenção exponencial.

Em relação ao assunto dos descontos bancários, Morgado et al (2015) apresentam a seguinte fórmula:

$$A = F \cdot (1 - d \cdot t), \text{ sendo: } \begin{cases} F \rightarrow \text{valor de face ou valor nominal de um título} \\ A \rightarrow \text{valor descontado} \\ d \rightarrow \text{taxa de desconto bancário} \\ t \rightarrow \text{prazo da operação} \end{cases}$$

A taxa d de desconto bancário também pode ser designada de taxa de desconto simples bancário ou ainda de taxa de desconto simples “por fora” e o prazo da operação t é medido na unidade de tempo a que se refere a taxa.

O valor do desconto bancário é dado pela diferença: $(F - A)$. Geralmente, os descontos bancários simples são maiores que os compostos.

Morgado *et al.* (2015) fazem uma crítica sobre o número exagerado de páginas nos livros de Matemática Financeira sobre o assunto de descontos, ressaltando que os descontos racionais ou descontos “por dentro” são apenas teóricos e não existem na vida real.

Apresenta-se o seguinte exemplo de exercício com cálculo de desconto bancário em Morgado *et al.* (2015): Rafael desconta uma nota promissória de R\$ 1.000,00, com vencimento de 60 dias, em um banco cuja taxa de desconto é 4% ao mês. Pergunta-se: a) Quanto Rafael receberá? b) Qual a taxa mensal de juros que Rafael está pagando?

a) Quanto Rafael receberá? $A = F \cdot (1 - d \cdot t) = 1.000 \cdot (1 - 0,04 \cdot 2) = 920$

b) Qual a taxa mensal de juros que Rafael está pagando? Deve-se determinar a taxa mensal de juros i referente ao recebimento hoje do valor de R\$ 920,00 para pagamento, em dois meses, de R\$ 1.000,00, o é equivalente à seguinte equação:

$$^6 \underbrace{\left[1 + 0,06 \cdot \left(\frac{10}{30} \right) \right]}_{= 1,02} > \underbrace{(1 + 0,06)^{\frac{10}{30}}}_{= 1,019613}$$

$$920 \cdot (1 + i)^2 = 1.000 \Rightarrow i = \sqrt{\frac{1000}{920}} - 1 \cong 4,26\% \text{ a. m.}$$

No estudo das *Taxas Equivalentes*, as seguintes considerações são importantes para a construção e a interpretação das fórmulas que as envolvem:

- 1) O que significa determinar uma taxa por unidade de tempo equivalente a outra estabelecida por outra unidade de tempo (taxas equivalentes)? Significa ter duas taxas por unidades de tempo diferentes que geram o mesmo Montante, considerando um mesmo período de tempo.
- 2) Esse conceito é o de *equivalência de taxas*, que difere do de proporcionalidade de taxas (grandezas diretamente proporcionais).
- 3) Matematizando o significado de 1) sobre equivalência de taxas, em que i_1 e i_2 denotam taxas e n_1 e n_2 os períodos de tempo, temos:

$$C_0 \cdot (1 + i_1)^{n_1} = C_0 \cdot (1 + i_2)^{n_2} \Rightarrow (1 + i_1)^{n_1} = (1 + i_2)^{n_2}$$

- 4) Considere que $n_1 = 1$ e $n_2 = n$ sejam períodos de tempos equivalentes expressos com unidades diferentes. Assim:

$$1 + i_1 = (1 + i_2)^n \Rightarrow i_1 = (1 + i_2)^n - 1$$

Uma estratégia para a introdução aos conceitos de capitalização composta e de equivalência de capitais, sem a utilização de fórmulas, é, por exemplo, com a aplicação, em sala de aula, de exercícios para manipulações com Fatores de Correção e Taxas Equivalentes como as seguintes, em que se pede para determinar um único valor equivalente às situações apresentadas:

- a) Três aumentos sucessivos e mensais de 10% , de 20% e de 30%:

$$(1 + x) = (1 + 0,1) \cdot (1 + 0,2) \cdot (1 + 0,3) = (1,1) \cdot (1,2) \cdot (1,3) = 1,716$$

$$x = 1,716 - 1 = 0,716 = 71,6\% \text{ a.t. no trimestre.}$$

$$\text{ou } x = (1,716)^{\frac{1}{3}} - 1 \cong 19,72\% \text{ a.m. durante três meses.}$$

- b) Dois descontos sucessivos e mensais de 10% e de 20% e no mês seguinte um aumento de 30%:

$$(1 + x) = (1 - 0,1) \cdot (1 - 0,2) \cdot (1 + 0,3) = (0,9) \cdot (0,8) \cdot (1,3) = 0,936$$

$$x = 0,936 - 1 = -0,064 = -6,4\% \text{ a.t. no trimestre.}$$

ou $x = (0,936)^{\frac{1}{3}} - 1 \cong -2,18\%$ a.m. durante três meses.

- c) Dois aumentos sucessivos e mensais de 10% e de 20% e no mês seguinte um desconto de 20%:

$$(1 + x) = (1 + 0,1) \cdot (1 + 0,2) \cdot (1 - 0,3) = (1,1) \cdot (1,2) \cdot (0,8) = 1,056$$

$$x = 1,056 - 1 = 0,056 = 5,6\% \text{ a.t. no trimestre.}$$

ou $x = (1,056)^{\frac{1}{3}} - 1 \cong 1,83\%$ a.m. durante três meses.

Nos exemplos, os Fatores de Correção, aplicados mês a mês, são equivalentes, ao final do período considerado, a um Fator Acumulado de Correção. Depois, manipulam-se as taxas acumuladas para a obtenção dos seus valores equivalentes mensais.

É importante observar que um Fator de Correção pode aumentar os valores iniciais ou os reduzir: $(1 + i\%) > 1$ e $(1 - i\%) < 1$ como visto nos exemplos dados. Estas relações introduzem, a primeira, um processo de “capitalização composta”; e a segunda, um processo de “descapitalização composta”.

Em um plano mais concreto, poderiam ainda ser propostas atividades, tais como:

a) Se os salários sobem 26% e os preços sobem 20%, qual é o aumento do poder aquisitivo? O aumento será dado por $x = \frac{1,26}{1,2} - 1 = 5\%$; b) Se um imposto tributa os salários em 20%, que aumento deve ser concedido para que os novos valores líquidos dos salários sejam iguais aos seus valores brutos iniciais? Este aumento deverá ser de $x = \frac{1}{0,8} - 1 = 25\%$.

A importância desta abordagem é o detalhamento do raciocínio iterativo dos juros compostos por meio da aplicação dos Fatores de Correção.

Um exemplo adicional é: Antônio, vendendo dois carros pelo mesmo preço – um com lucro de 20% e outro com prejuízo de 20%, tem que resultado final nesta operação? O raciocínio para resolver este problema é o seguinte: compra-se um carro por um preço p , sendo vendido por $(1,2)p$; e compra-se outro carro por um preço q , sendo vendido por $(0,8)q$. Sabe-se que $p = \frac{2q}{3}$. Logo, manipulando os Fatores de Correção, tem-se: $x = \left(\frac{4,8}{5} - 1\right) = -4\%$, o que representa um prejuízo de 4% na operação.

Uma possível estratégia de aula mediada pela modelagem para a exploração de conceitos financeiros pode ser exemplificada com o seguinte esboço teórico na Tabela 2:

Tabela 2 – Taxas proporcionais e equivalentes

Duas taxas i_1 e i_2 às quais se referem, respectivamente, aos períodos n_1 e n_2 são ditas:

a) Proporcionais: $\frac{i_1}{i_2} = \frac{n_1}{n_2}$

b) Equivalentes: $(1 + i_1)^{n_1} = (1 + i_2)^{n_2}$

FONTE: Acervo do autor (elaboração própria).

Assim, um professor de Matemática pode adotar uma aula focada no desenvolvimento teórico e nas diferenças conceituais de taxas proporcionais e equivalentes, a partir de um resumo geral como na Tabela 2, para realização de diversas modelagens.

A seguir, apresenta-se um exercício, dentre outros possíveis, para a caracterização desta diferença conceitual:

Converter uma taxa de juros compostos de 21% ao ano (capitalizada mensalmente) em uma taxa anual.

Esta conversão possui duas etapas:

$$1^a) \frac{21\%}{i_m} = \frac{12 \text{ meses}}{1 \text{ mês}} \Rightarrow i_m = \frac{21\%}{12} = 1,75\% \text{ a. m.}$$

$$2^a) (1 + i_m)^{12} = (1 + i_a)^1 \Rightarrow i_a = (1 + i_m)^{12} - 1$$

$$\Rightarrow i_a = (1,0175)^{12} - 1 = 0,231439 \cong 23,14\% \text{ a. a.}$$

Deve-se destacar que o cálculo dos índices inflacionários também requer o entendimento conceitual sobre as taxas equivalentes.

A taxa de inflação (f) representa um índice de redução do poder aquisitivo das pessoas. Assim, sabendo-se os juros aparentes (i) de um investimento e a taxa de inflação, pode-se determinar os juros reais (r) por meio da seguinte relação matemática:

$$1 + i = (1 + f) \cdot (1 + r) \Rightarrow r = \frac{1 + i}{1 + f} - 1$$

Para o entendimento do conceito, utiliza-se o seguinte problema de aplicação: sendo uma inflação 5%, em quanto diminui o poder de compra? E sendo uma deflação 5%, em quanto aumenta o poder de compra?

Para a resolução do problema, utilizam-se os Fatores de Correção e deve-se saber que a inflação aumenta os preços e a deflação os reduz:

$$X = P \cdot Q \text{ com } \begin{cases} X \text{ (Salário)} \\ P \text{ (Preço médio dos bens)} \\ Q \text{ (Total de bens)} \end{cases}$$

$$X = P \cdot Q = (1,05 \cdot P) \cdot Q' \Rightarrow Q' = \left(\frac{1}{1,05} \right) \cdot Q = 95,24\% \cdot Q$$

$$\Rightarrow Q' - 1 = -4,76\% \cdot Q$$

Isto é, há uma redução de 4,76% do poder de compra com uma inflação de 5%.

$$X = P \cdot Q = (0,95 \cdot P) \cdot Q' \Rightarrow Q' = \left(\frac{1}{0,95} \right) \cdot Q = 105,26\% \cdot Q$$

$$\Rightarrow Q' - 1 = 5,26\% \cdot Q$$

Isto é, há uma elevação de 5,26% do poder de compra com uma deflação de 5%.

A seguinte questão do ENEM de 2020 explica o conceito de inflação, apresenta a sua fórmula e introduz, no seu enunciado, uma reflexão de natureza social, conforme a Figura 4 a seguir:

Figura 4 – Tema inflação abordado no ENEM

Questão 151 - Matemática e suas Tecnologias

O ganho real de um salário, r , é a taxa de crescimento do poder de compra desse salário. Ele é calculado a partir do percentual de aumento dos salários e da taxa de inflação, referidos a um mesmo período. Algebricamente, pode-se calcular o ganho real pela fórmula

$$1 + r = \frac{1 + i}{1 + f},$$

em que i é o percentual de aumento no valor dos salários e f é a taxa de inflação, ambos referidos a um mesmo período.

Considere que uma categoria de trabalhadores recebeu uma proposta de aumento salarial de 10%, e que a taxa de inflação do período correspondente tenha sido 5%. Para avaliar a proposta, os trabalhadores criaram uma classificação em função dos ganhos reais conforme o quadro.

Ganho real	Classificação
Igual ou superior a 5%	Boa
Maior ou igual a 1,5% e menor do que 5%	Regular
Maior do que 0% e menor do que 1,5%	Ruim
Igual ou menor do que 0%	Inaceitável (ganho real negativo significa perda do poder de compra dos salários)

Eles classificaram a proposta de aumento e justificaram essa classificação apresentando o valor do ganho real que obteriam.

A classificação, com sua respectiva justificativa, foi

(A) inaceitável, porque o ganho real seria mais próximo de - 5%.

(B) ruim, porque o ganho real seria mais próximo de 1,05%.

(C) regular, porque o ganho real seria mais próximo de 4,7%.

(D) boa, porque o ganho real seria mais próximo de 9,5%.

(E) boa, porque o ganho real seria mais próximo de 5%.

FONTE: ENEM 2020.

Resolvendo a questão da Figura 4, encontra-se a resposta: “C”, pois, considerando uma inflação de 5%, tem-se: $1 + r = \frac{1+0,10}{1+0,05} \Rightarrow r = \frac{1,10}{1,05} - 1 = 4,76\%$.

Em sala de aula, ao trabalharmos esta questão, poderíamos fazer novas suposições, como, por exemplo: verificar o que aconteceria com o ganho real na hipótese de uma deflação

de 5%. Neste caso, teríamos um ganho real de 15,79%, dado pela aplicação da fórmula:

$$1 + r = \frac{1+0,10}{1-0,05} \Rightarrow r = \frac{1,10}{0,95} - 1 = 15,79\%.$$

Isto nos mostra que o essencial não é a “decoreba” de fórmulas e sim o significado e a interpretação das suas variáveis para as aplicações práticas.

Neste sentido, uma questão de Matemática Financeira pode apresentar as fórmulas no seu enunciado e, ainda assim, ser uma questão qualificada para a verificação de competências financeiras.

Na Figura 5, a seguir, tem-se uma situação com a temática de inflação, cuja resolução precisa ser modelada:

Figura 5 – Inflação x dinheiro



FONTE: Livro Aberto – Educação Financeira.

Com base na Figura 5, uma boa oportunidade, em sala de aula, é a introdução do conceito de inflação e a busca de metodologias que analisem as variações do “poder de compra” das pessoas e como isto se traduz em termos de inflação. Nesta figura, pode-se, por exemplo, pedir o cálculo da inflação anual no Brasil durante o período de 1994-2019.

Este cálculo servirá para verificar a inflação anual no Brasil, considerando este índice como um redutor do “poder de compra” da população, como observado a seguir:

- 1) “Uma cédula de R\$ 5,00” em 1994 comprava “ $5x$ ” produtos a um preço médio “ y ”. Com a inflação f acumulada de 1994 até 2019, passou a comprar “ $(0,83).x$ ” produtos a um preço médio “ $y(1 + f)$ ”. Com isto:

$$(5x).y = (0,83.x).y(1 + f) \Rightarrow (1 + f) = \frac{5}{0,83} \Rightarrow f = \frac{5}{0,83} - 1 \cong 502,41\%$$

- 2) Analogamente, tem-se para:

$$✓ \text{ “Uma cédula de R\$ 10,00”} - f = \frac{10}{1,61} - 1 \cong 521,12\%$$

$$✓ \text{ “Uma cédula de R\$ 50,00”} - f = \frac{50}{8,33} - 1 \cong 500,24\%$$

$$✓ \text{ “Uma cédula de R\$ 100,00”} - f = \frac{100}{16,65} - 1 \cong 500,60\%$$

Com a modelagem, pode-se escrever a seguinte faixa de valores para a estimação da inflação: $5 < f < 5,22$.

$$f = 5 \Rightarrow (1 + i)^{25} = 6 \Rightarrow i = \sqrt[25]{6} - 1 \cong 7,43\% \text{ a. a.}$$

$$f = 5,22 \Rightarrow (1 + i)^{25} = 6,22 \Rightarrow i = \sqrt[25]{6,22} - 1 \cong 7,58\% \text{ a. a.}$$

$$\text{Logo: } 7,4\% \text{ a. a.} < i < 7,6\% \text{ a. a.}$$

Esta atividade poderia ser discutida e ampliada com simulações potencialmente elaboradas na Calculadora do IPCA (Índice de Preços ao Consumidor Amplo), que possibilita a atualização de um valor a partir de um intervalo entre duas datas e a inflação estimada para o período. Assim, dado um valor na data inicial, calcula-se um novo valor na data final com base na componente inflacionária.

Esta calculadora foi elaborada pelo IBGE e está disponibilizada na internet em: <https://www.ibge.gov.br/explica/inflacao.php>. Estas atualizações dos valores podem ser feitas desde o início da série histórica do IPCA em janeiro de 1980 e, metodologicamente, os valores são corrigidos, considerando o produto entre o valor inicial e o resultado da divisão do número-índice do mês final pelo número-índice do mês anterior ao mês inicial. O resultado desta divisão é o fator que corresponde à variação acumulada do IPCA no período desejado. Portanto, esta ferramenta digital, denominada Calculadora do IPCA, automatiza o procedimento descrito.

1.2.2 Juros simples e compostos modelados por outros instrumentos matemáticos

Conforme SMOLE e DINIZ (2013), a Figura 6 traz elementos a serem explorados em uma aula de introdução a conceitos e abordagens sobre os juros simples para o Ensino Médio:

Figura 6 – Juros simples x Montantes formados

Período	Capital inicial	Juros no período	Montante a ser pago
1º mês	2000	$160 = 0,08 \cdot 2000$	$M_1 = 2000 + 160 = 2160$
2º mês	2000	$320 = 2 \cdot 160$	$M_2 = 2000 + 320 = 2000 + 2 \cdot 160 = 2320$
3º mês	2000	$480 = 3 \cdot 160$	$M_3 = 2000 + 480 = 2000 + 3 \cdot 160 = 2480$
4º mês	2000	$640 = 4 \cdot 160$	$M_4 = 2000 + 640 = 2000 + 4 \cdot 160 = 2640$
5º mês	2000	$800 = 5 \cdot 160$	$M_5 = 2000 + 800 = 2000 + 5 \cdot 160 = 2800$
6º mês	2000	$960 = 6 \cdot 160$	$M_6 = 2000 + 960 = 2000 + 6 \cdot 160 = 2960$
...	...	...	...
tº mês	2000	$j = 2000 \cdot 0,08 \cdot t$	$M = 2000 + \frac{2000 \cdot 0,8 \cdot t}{1}$
↓	↓	↓	↓
tº mês	C	$j = C \cdot i \cdot t$	$M = C + j$

Observando a tabela, podemos notar que, se continuássemos até um tempo t indeterminado, o cálculo do juro simples poderia ser generalizado assim:

Se um capital C , aplicado a uma taxa i ao período, no sistema de juros simples, rende juros j ao fim de um período t , então podemos dizer que:

$$j = C \cdot i \cdot t$$

O montante a ser pago (ou recebido) após esse período é dado pelo capital inicial mais o juro, ou seja:

$$M = C + j$$

FONTE: SMOLE e DINIZ (2013).

Nesta parte do trabalho, bem como em outras, recomenda-se a leitura do conteúdo do APÊNDICE B.

Nos juros simples, calcula-se os juros por meio de uma fórmula (construída anteriormente) de um caso particular para um caso geral, em que os valores dos juros são acrescidos, a cada período, de uma constante, que é o produto do capital C pela taxa i . Na fórmula dos juros simples, este produto representa a razão de uma Progressão Aritmética.

E ainda, a partir da Figura 7, pode-se desenvolver uma aula para o Ensino Médio sobre conceitos e abordagens relacionados aos juros compostos (SMOLE e DINIZ, 2013):

Figura 7 – Juros compostos x Montantes acumulados

Período	Capital inicial	Juros no período	Montante a ser pago
1º mês	C	$i \cdot C$	$M_1 = C + i \cdot C = C(1 + i)$
2º mês	M_1	$i \cdot M_1$	$M_2 = M_1 + i \cdot M_1 = M_1(1 + i) = C(1 + i)(1 + i) = C(1 + i)^2$
3º mês	M_2	$i \cdot M_2$	$M_3 = M_2 + i \cdot M_2 = M_2(1 + i) = C(1 + i)^2(1 + i) = C(1 + i)^3$
4º mês	M_3	$i \cdot M_3$	$M_4 = M_3 + i \cdot M_3 = M_3(1 + i) = C(1 + i)^3(1 + i) = C(1 + i)^4$
5º mês	M_4	$i \cdot M_4$	$M_5 = M_4 + i \cdot M_4 = M_4(1 + i) = C(1 + i)^4(1 + i) = C(1 + i)^5$
6º mês	M_5	$i \cdot M_5$	$M_6 = M_5 + i \cdot M_5 = M_5(1 + i) = C(1 + i)^5(1 + i) = C(1 + i)^6$

Por essa nova tabela, podemos perceber que o cálculo do montante, mês a mês, forma uma **progressão geométrica** de razão $(1 + i)$. Dessa forma, para um tempo t , o cálculo do montante será dado por:

$$M = C(1 + i)^t$$

onde C é o capital inicial, i é a taxa e t é o tempo de aplicação do capital.

Observe que a taxa de juros e o prazo devem estar na mesma unidade de tempo. No nosso exemplo, a unidade é o mês.

FONTE: SMOLE e DINIZ (2013).

Nos juros compostos, calculam-se os montantes acumulados através de uma fórmula (construída anteriormente) de um caso particular para um caso geral.

Assim, verifica-se um processo de crescimento do capital C , que, após 1 período aplicado a uma taxa i , apresenta o Fator de Correção $(1 + i)$, gerando o montante $C \cdot (1 + i)$.

Após mais um período, aplica-se novamente este Fator de Correção, gerando agora o novo montante $C \cdot (1 + i) \cdot (1 + i) = C \cdot (1 + i)^2$ e, assim, sucessivamente, de modo que um capital inicial C , após t períodos (com capitalizações sucessivas), apresenta o seguinte valor: $C \cdot (1 + i)^t$.

Nos juros compostos, primeiramente, determinamos os valores dos montantes para, depois, encontrarmos os valores dos juros. Isto ocorre porque é o valor do montante dos juros compostos que nos fornece, diretamente, o termo geral de uma Progressão Geométrica com razão igual ao Fator de Correção $(1 + i)$.

Uma aula como esta pode ser conduzida, por exemplo, com a construção de tabelas para verificação de padrões: tipos de progressões, termos iniciais, razões e aplicações, a fim de que os alunos construam as fórmulas e elaborem exemplos dentro de uma perspectiva de investigação matemática e, com esta estratégia pedagógica, obtenham novos conhecimentos a partir de outros já assimilados.

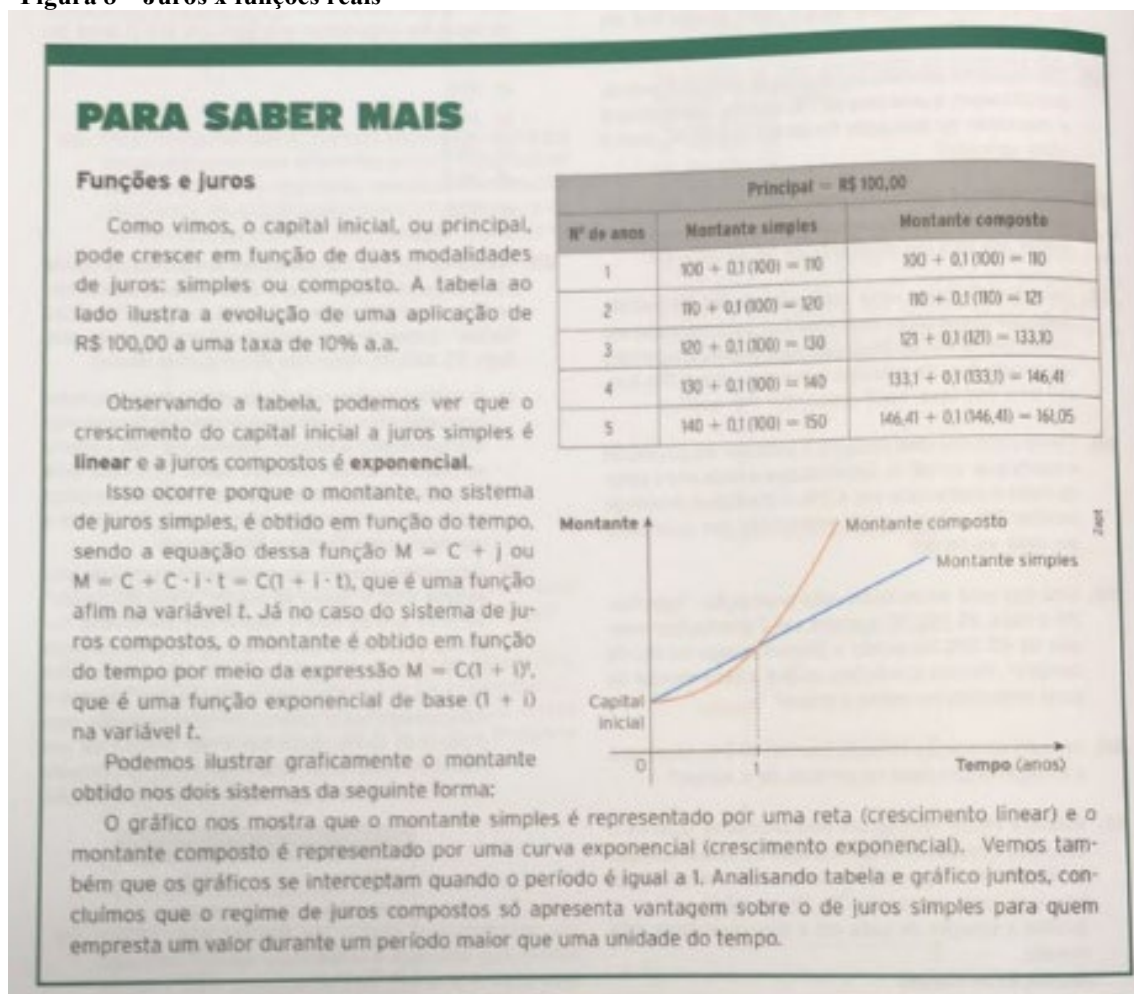
A Figura 8 (SMOLE e DINIZ, 2013) estabelece, a seguir, uma abordagem interessante para o entendimento dos tipos de juros (simples e compostos) por meio de definições e exemplos de certas funções reais (afins e exponenciais, respectivamente).

Assim, convém apontar que o desenvolvimento teórico proposto na Figura 8 traz uma abordagem integradora entre os assuntos de juros simples e de funções afins; e, de forma semelhante, apresenta também uma abordagem integradora entre os assuntos de juros compostos e de funções exponenciais.

Embora este tipo de abordagem não seja inovadora, por exemplo, para os leitores da Coleção “A Matemática do Ensino Médio”, publicados pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) com foco na formação docente, deve-se destacar que esta abordagem é até pouco usual nos textos didáticos para o Ensino Médio. No caso apresentado, o desenvolvimento teórico foi realizado com linguagem adequada ao público de estudantes do Ensino Médio.

Segue o conteúdo didático detalhado na Figura 8:

Figura 8 – Juros x funções reais



FONTE: SMOLE e DINIZ (2013).

Analisando a exposição realizada na Figura 8, temos que, de fato, quando o período em questão é igual a 1, os juros (simples e compostos) e as suas funções representativas são, numericamente, iguais:

$$\left. \begin{array}{l} M_1(t) = C + C \cdot i \cdot t \text{ (função afim)} \\ M_2(t) = C \cdot (1 + i)^t \text{ (função exponencial)} \end{array} \right\} \Rightarrow M_1(1) = M_2(1)$$

Assim, graficamente, quando $t = 1$, os montantes dos juros simples e compostos são iguais e quando $t \neq 1$, temos os seguintes casos de transformação de um capital C em um montante M ao longo de um tempo t :

- a) $t < 1 \Rightarrow M_1(t) > M_2(t)$: os juros simples têm a melhor remuneração; e
- b) $t > 1 \Rightarrow M_1(t) < M_2(t)$: os juros compostos têm a melhor remuneração.

Essa ideia merece ser bem fundamentada, pois admitir que existam certos períodos de tempo (prazos) nos quais os juros simples possuem uma melhor remuneração do que os compostos é uma ideia bem contraintuitiva. Neste sentido, esta modelagem dos juros por meio de funções é, particularmente, útil em relação a este objetivo pedagógico de análise dos montantes a juros simples e compostos.

Este tipo de análise permite ainda a fundamentação do fato de os montantes dos juros compostos calculados pela convenção linear serem maiores do que os calculados pela convenção exponencial.

Isto se dá com base no argumento de que, conforme a análise gráfica, tem-se que os juros simples possuem uma melhor remuneração do que os compostos para períodos menores que uma unidade de tempo.

1.2.3 Séries uniformes de prestações fixas e amortizações

As séries uniformes referem-se a prestações fixas (pagamentos ou recebimentos) durante um prazo n (número de prestações) que considera uma unidade de tempo estipulada. Assim, por exemplo, podemos ter n séries mensais, semestrais, anuais, etc., que devem estar referenciadas a taxas também mensais, semestrais, anuais, etc.

Este conteúdo, geralmente, não é desenvolvido no Ensino Médio, mas a BNCC sugere uma exploração inicial deste assunto e, como será visto, o ENEM tem ainda apresentado, nos últimos anos, questões que tangenciam conceitos de séries uniformes.

Embora pouco trabalhado no Ensino Médio, este tema possui muitas aplicações ao cotidiano das pessoas, haja vista que as operações com empréstimos bancários ou as relacionadas à compra de mercadorias a prazo necessitam da adequada interpretação dos fluxos financeiros apresentados e da formulação das séries uniformes para a realização dos cálculos.

Na edição de janeiro de 2020 do PAPMEM⁷, o professor palestrante Luciano Castro apresentou uma atividade de Matemática Financeira a partir de um artigo da RPM⁸ 70, intitulado: “Duas vezes 100 é igual a 200?”, que trabalha alguns importantes conceitos sobre séries uniformes e amortizações de dívidas, enfocando na interpretação das situações financeiras para a formação dos conceitos presentes nestes assuntos. Encontra-se disponível (resolvida e comentada) na seguinte página do IMPA: <https://impa.br/wp-content/uploads/2020/01/PAPMEM_JAN_2020_Matematica_Financeira.pdf>.

Destaca-se que as *prestações fixas* correspondem a *pagamentos* ou a *recebimentos periódicos e iguais*.

Estas séries são ainda denominadas anuidades ou rendas certas.

Neste conteúdo, também é importante o domínio do valor do dinheiro no tempo e os deslocamentos dos fluxos financeiros, bem como a correta manipulação sobre os Fatores de Correção para os processos de capitalização das séries uniformes:

- a) Para deslocamentos a Valor Futuro (n períodos posteriores) – VF: $(1 + i)^n$; e
- b) Para deslocamentos a Valor Presente (n períodos anteriores) – VP: $(1 + i)^{-n}$.

Também é importante o conhecimento da fórmula que converte o Valor Presente (VP) em Futuro (VF) e vice-versa. Assim, denotaremos (VP) por P e (VF) por F na fórmula a seguir:

$$F = P \cdot (1 + i)^n \Rightarrow P = \frac{F}{(1 + i)^n} = F \cdot (1 + i)^{-n}$$

Considerando um fluxo de n pagamentos ou recebimentos periódicos (R), realizados ao fim de cada período⁹, temos, na Figura 9 a seguir, n setas verticais e iguais indicando,

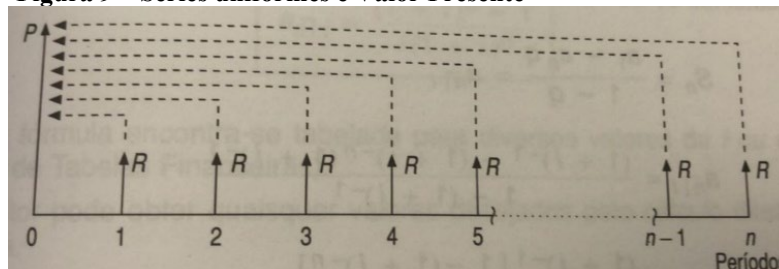
⁷ O Programa de Aperfeiçoamento para Professores de Matemática do Ensino Médio – PAPMEM tem como objetivo o aprimoramento dos professores de Matemática do Ensino Médio no Brasil, sendo conduzido pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), que convida um conjunto de palestrantes em cada edição para desenvolverem temas de relevância para a prática docente. Esta atividade, proposta em janeiro de 2020, complementou uma primeira atividade trazida pelo professor Luciano Castro para o PAPMEM em janeiro de 2017, que apresentou uma introdução aos fluxos financeiros, incluindo contextos inflacionários.

⁸ A Revista do Professor de Matemática (RPM) é uma publicação da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM). A RPM 70 foi publicada em 2009 pelos autores Ilydio Pereira de Sá e Vinícius Gusmão Pereira de Sá e se encontra disponível em: <<https://www.rpm.org.br/cdrpm/70/4.html>>.

⁹ Ou seja, considerando do tempo 1 até o tempo n .

graficamente, um fluxo periódico de valores, bem como o somatório equivalente deste fluxo trazido a Valor Presente (P)¹⁰, que significa trazer todos os “R” para o tempo zero:

Figura 9 – Séries uniformes e Valor Presente



FONTE: MATHIAS e GOMES (2004).

Algebricamente, o Valor Atual (P) de uma série de n parcelas iguais a R , sendo i a taxa de juros é:

$$P = \frac{R}{(1+i)} + \frac{R}{(1+i)^2} + \frac{R}{(1+i)^3} + \dots + \frac{R}{(1+i)^n}$$

$$P = \frac{R}{(1+i)^n} \times \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1}$$

$$P = \frac{R}{(1+i)^n} \times \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$F = R \times \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Estas fórmulas (para o Valor Atual ou Presente, denominado P; e para o Valor Futuro, denominado F) são aplicáveis aos casos mais comuns em Matemática Financeira, que são os fluxos financeiros postecipados (ao final de cada período).

Assim, matematicamente, P é o somatório das prestações trazidas a uma unidade de tempo antes da primeira prestação (trazidas a tempo zero) e F é o somatório das prestações levadas ao período da n -ésima prestação.

Contudo, com menor incidência no cotidiano, aparecem ainda os fluxos financeiros antecipados (ao início de cada período), em que se verifica um fluxo uniforme de n rendas do tempo zero até o tempo $n - 1$.

¹⁰ Note que poderíamos fazer um processo semelhante por meio do somatório equivalente do fluxo de valores a Valor Futuro, levando as prestações ao tempo n , mas isto não é necessário pois, tendo o Valor Presente, basta só aplicarmos a fórmula para o Valor Futuro: $F = P \cdot (1+i)^n$.

Lapponi (2005, p.224-225) defende que é “oportuna a apresentação de equivalências financeiras para a obtenção das fórmulas das rendas antecipadas por meio da manipulação das fórmulas das rendas postecipadas, e vice-versa”.

Isto permite a verificação e a adaptação de uma fórmula a novos pressupostos, o que está na perspectiva construtiva da modelagem e é positivo porque reduz o número de fórmulas a serem previamente conhecidas pelos alunos.

Assim, com esta tarefa de manipulação de ferramentas e conceitos financeiros para a obtenção de fórmulas, pode-se desenvolver uma atividade de Modelagem Matemática como detalhado, a seguir, na Tabela 3:

Tabela 3 – Modelagem de séries antecipadas a partir de postecipadas

MODELO POSTECIPADO:

$$\begin{cases} P_{\text{post}} = \frac{R_{\text{post}}}{(1+i)^n} \times \frac{(1+i)^n - 1}{i} \\ F_{\text{post}} = R_{\text{post}} \times \frac{(1+i)^n - 1}{i} \end{cases}$$

Etapa 1 da Modelagem: observar que o fluxo das “ n ” R_{ant} prestações antecipadas do tempo zero até o tempo $n - 1$ equivalem ao fluxo das “ n ” R_{post} prestações postecipadas do tempo 1 até o tempo n . Logo: $R_{\text{ant}} = \frac{R_{\text{post}}}{(1+i)}$.

Etapa 2 da Modelagem: criar, artificialmente, uma série postecipada de Valor Presente no “tempo fictício” -1 (uma unidade anterior ao tempo zero) com “ n ” prestações R_{ant} , sendo a primeira no tempo zero e a n -ésima no tempo $n - 1$. O somatório desta série corresponde ao Valor Presente no tempo zero e Valor Futuro no tempo $n - 1$. Portanto, temos:

MODELO ANTECIPADO:

$$\begin{cases} P_{\text{ant}} = \frac{R_{\text{ant}}}{(1+i)^n} \times \frac{(1+i)^n - 1}{i} \times (1+i) \\ F_{\text{ant}} = R_{\text{ant}} \times \frac{(1+i)^n - 1}{i} \times (1+i) \end{cases}$$

FONTE: Acervo do autor (elaboração própria).

Deve-se observar na Figura 10, a seguir, uma situação real de séries uniformes cujas informações podem ser objeto de modelagem (exemplo: análise de sensibilidade das variáveis para outros valores ou hipóteses):

Figura 10 – Diferentes formas de pagamento

FONTE: Livro Aberto – Educação Financeira.

Exercício de Aplicação 1 – Certa pessoa aceitou um empréstimo garantido pelas promissórias, a seguir discriminadas:

R\$	Prazo de vencimento
10.000,00	em 1 mês
20.000,00	em 3 meses
40.000,00	em 6 meses

No fim do primeiro mês, na impossibilidade de pagar o primeiro título, entrou em acordo com o credor para efetuar o pagamento do total do empréstimo ao final do segundo mês. Sendo de 5 % a.m. a taxa envolvida na época do fechamento do negócio e de 15% a.m. a taxa acertada para as parcelas vencidas e não pagas, qual o pagamento global a ser feito na referida data?

Segue a resolução, conforme a Tabela 4, que explora dois tipos de representações para a manipulação dos fluxos financeiros que indicam o valor do dinheiro no tempo:

Tabela 4 – Diferentes representações - tempo focal 2

Representação Gráfica da transposição do somatório de valores ao tempo focal 2	Equação Financeira da transposição do somatório de valores ao tempo focal 2
	$X = 10.000 \cdot (1,15) + \frac{20.000}{1,05} + \frac{40.000}{(1,05)^4}$ $X \cong \text{R\$ } 63.455,72$

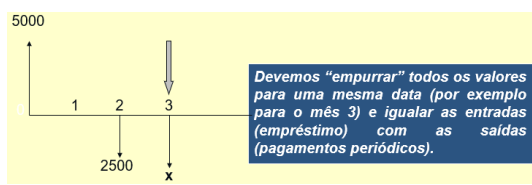
FONTE: Acervo do autor (elaboração própria).

Exercício de Aplicação 2 – Vinícius tomou um empréstimo de R\$ 5.000,00 a juros mensais de 5%. Dois meses depois, ele pagou R\$ 2.500,00 e, um mês após esse pagamento, liquidou seu débito. Qual o valor desse último pagamento?

Neste exercício, deve-se perceber a diferença entre os fluxos financeiros positivos e negativos para a montagem da equação financeira associada.

A resolução encontra-se na Tabela 5 a seguir:

Tabela 5 – Diferentes representações - tempo focal 3

Representação Gráfica com equivalências financeiras para o tempo focal 3	Equação Financeira com equivalências financeiras para o tempo focal 3
	Para DÍVIDA SER PAGA, devemos ter: $-5.000 \cdot (1,05)^3 + 2.500 \cdot (1,05) + x = 0$ $x = 5000 \cdot (1,05)^3 - 2500 \cdot (1,05) \cong \text{R\$ } 3.163,13$

FONTE: Acervo do autor (elaboração própria).

Exercício de Aplicação 3 – Um carro custa R\$ 35.000,00 à vista ou pode ser pago em 18 prestações mensais iguais. Sendo cobrados juros de 3% ao mês, calcule a prestação, considerando que a primeira seja paga 4 meses após a compra.

Neste exercício, mais importante do que a aplicação das fórmulas financeiras são as suas corretas manipulações e interpretações acerca do significado dos fluxos financeiros, o que abrange a perspectiva da modelagem, conforme detalhado a seguir:

$$\text{EQUAÇÕES (Modelagem)} \begin{cases} X = 35.000 = \frac{Y}{(1,03)^3} \Rightarrow Y = 35.000 \cdot (1,03)^3 \\ Y = R \cdot \frac{(1,03)^{18} - 1}{(1,03)^{18} \cdot 0,03} = 35.000 \cdot (1,03)^3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow R = \frac{1.050 \cdot (1,03)^{21}}{(1,03)^{18} - 1} \cong 2.780,78$$

A prestação do carro é R\$ 2.780,78.

Exercício de Aplicação 4 – Maria quer comprar uma TV de R\$ 1.500,00, tendo sido oferecida a ela pela loja três possíveis opções de pagamento:

1ª Opção: à vista com 10% de desconto.

2ª Opção: em duas prestações mensais iguais e sem desconto, vencendo a primeira um mês após a compra (modelo postecipado).

3ª Opção: em três prestações mensais iguais e sem desconto, vencendo a primeira no ato da compra (modelo antecipado).

Pergunta-se: Qual é a melhor opção se o dinheiro vale 25% ao mês de juros. Seria possível calcular as taxas de juros para as duas situações de compra a prazo, caso fossem consideradas separadamente, bem como indiferentes em relação a opção à vista?

Colocando os valores destas opções na data zero (ou seja, colocando-os a Valor Presente), tem-se os seguintes valores líquidos totais:

✓ Na 1ª Opção: maior valor a ser pago: $1.500 \cdot (0,9) = 1.350$

✓ Na 2ª Opção: menor valor a ser pago: $\frac{750}{1,25} + \frac{750}{(1,25)^2} = 1.080$

✓ Na 3ª Opção: valor intermediário a ser pago: $500 + \frac{500}{1,25} + \frac{500}{(1,25)^2} = 1.220$

Como pode ser observado, eventualmente, a intuição poderia enganar as pessoas que escolhessem as opções de pagar à vista ou em três prestações.

Objetivamente, colocando as três opções a Valor Presente, verifica-se que a 2ª é a melhor, pois equivale à menor prestação. Assim, é importante focalizar nas variações do valor do dinheiro no tempo para as análises e comparações financeiras em geral.

A análise, anteriormente apresentada, fundamentou-se no conceito do Valor Presente Líquido (VPL), mas também podem ser feitas análises financeiras por meio do conceito das taxas de retorno.

Neste exercício, ao buscarmos uma metodologia de cálculo para as taxas de juros nas duas situações de compra a prazo, designadas por i_1 e i_2 (respectivamente, taxa da 2ª Opção e da 3ª Opção), colocamos a 1ª Opção como base para fins de equivalência de capitais.

Desta forma, para a 2ª Opção, temos:

$$\frac{750}{(1 + i_1)} + \frac{750}{(1 + i_1)^2} = 1.350$$

Considerando a variável auxiliar $x = 1 + i_1$ e substituindo na equação anterior, temos:

$$\frac{5}{x} + \frac{5}{x^2} = 9 \Rightarrow 9x^2 - 5x - 5 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{205}}{18} \cong \frac{5 \pm 14,3178}{18}$$

$$\Rightarrow i_1 = x - 1 \cong \frac{-13 \pm 14,3178}{18}$$

$$\Rightarrow i_1 \cong \frac{1,3178}{18} \cong 7,32\% \text{ a.m.}$$

$$\text{De fato: } \frac{750}{(1,0732)} + \frac{750}{(1,0732)^2} \cong 1.350$$

Para a 3ª Opção, temos:

$$500 + \frac{500}{(1 + i_2)} + \frac{500}{(1 + i_2)^2} = 1.350$$

Considerando a variável auxiliar $y = 1 + i_2$ e substituindo na equação anterior, temos:

$$\frac{10}{y} + \frac{10}{y^2} = 17 \Rightarrow 17y^2 - 10y - 10 = 0$$

$$\Rightarrow y = \frac{5 \pm \sqrt{195}}{17} \cong \frac{5 \pm 13,9642}{17}$$

$$\Rightarrow i_2 = y - 1 \cong \frac{-12 \pm 13,9642}{17}$$

$$\Rightarrow i_2 \cong \frac{1,9642}{17} \cong 11,55\% \text{ a.m.}$$

$$\text{De fato: } 500 + \frac{500}{(1,1155)} + \frac{500}{(1,1155)^2} \cong 1.350$$

Portanto, também conforme esta metodologia, a 2ª Opção é a melhor, pois tem a menor “taxa de transformação do valor à vista em valor parcelado”.

Destaca-se que esta metodologia, didaticamente apresentada, para os cálculos de i_1 e de i_2 , esboça o conceito da Taxa Interna de Retorno (TIR) de projetos de investimento.

Assim, por exemplo, quando perguntamos qual é a TIR anual de um investimento de R\$ 10.000,00, que me proporcionará uma receita de R\$ 20.000,00 ao fim do 1º ano e de R\$ 30.000,00 ao fim do 2º ano, estamos buscando encontrar a raiz positiva da seguinte equação do 2º grau:

$$\frac{20.000}{(1 + \text{TIR})} + \frac{30.000}{(1 + \text{TIR})^2} = 10.000 \Rightarrow (1 + \text{TIR})^2 - 2 \cdot (1 + \text{TIR}) - 3 = 0$$

$$\Rightarrow TIR = \frac{2 \pm 4}{2} - 1 = \frac{\pm 4}{2} \Rightarrow TIR = 200\% \text{ a. a.}$$

$$\text{De fato: } \frac{20.000}{3} + \frac{30.000}{9} = 10.000$$

Este, contudo, é um caso bem simples de TIR, pois há outros em que se fazem análises, a partir de séries com três termos, gerando (por artifício algébrico) uma equação do 3º grau; ou ainda, a partir de séries com quatro termos, gerando uma equação do 4º grau, etc.

Nestas situações, o cálculo algébrico da TIR se torna bem mais complicado, sendo o cálculo da TIR factível, na maioria dos casos, com o auxílio do Excel ou da Calculadora Financeira HP-12C.

Exercício de Aplicação 5 – Uma pessoa fez uma aplicação financeira mensal de R\$ 1.000,00 por 4 anos com uma taxa de juros compostos de 21% ao ano e com capitalização mensal. Após esse período, deixou o montante gerado rendendo durante mais 6 meses. Ao fim deste último período, realizou o resgate, tendo pago 20% a título de Imposto de Renda (IR) sobre rendimentos obtidos (apenas sobre os juros). Determinar o montante líquido após o desconto do IR.

Apresenta-se a seguinte resolução para este exercício:

$$\frac{21\%}{i_m} = \frac{12 \text{ meses}}{1 \text{ mês}} \Rightarrow i_m = \frac{21\%}{12} = 1,75\% \text{ a. m.}$$

$$(1 + i_m)^{12} = (1 + i_a)^1 \Rightarrow i_a = (1 + i_m)^{12} - 1$$

$$i_a = (1,0175)^{12} - 1 = 0,231439 \cong 23,14\% \text{ a. a.}$$

$$M_1 = \left[1000 \cdot \frac{(1,0175)^{48} - 1}{0,0175} \right] \cdot (1,0175)^6 \cong 82.409,59$$

$$J_1 = 82.409,59 - 48.000,00 \cong 34.409,59$$

$$M_2 \cong 82.409,59 - 0,2 \cdot (34.409,59)$$

$$M_2 \cong 82.409,59 - 6.881,92 = 75.527,67$$

É importante perceber que este montante final é gerado por meio do produto de dois fatores: o primeiro representa a agregação de um conjunto de valores aplicados mensalmente; e o segundo é um Fator de Acumulação que atualiza o primeiro agregado por mais 6 meses.

Destaca-se que, individualmente, estes dois fatores representam montantes de naturezas diferentes (anuidades e juros compostos). Situações financeiras como esta, em que podemos ter

um ou mais capitais se transformando em um ou mais capitais no decorrer do tempo, são comuns no cotidiano financeiro.

Ainda sobre as rendas uniformes, há ainda o caso particular das **Rendas Perpétuas**.

Uma perpetuidade de termos iguais a R (a uma taxa de juros i) tem o seu Valor Atual ou Presente (P), que se dá a uma unidade de tempo antes do primeiro pagamento, determinado pela seguinte fórmula:

$$P = \frac{R}{i}$$

Embora simples, esta fórmula é deduzida fazendo o n da fórmula¹¹ a seguir tender ao infinito:

$$P = \frac{R}{(1+i)^n} \times \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Observe o seguinte exercício de aplicação com Modelagem Matemática:

Quanto devemos investir, mensalmente, por 20 anos, a juros mensais de 0,5% para obtermos, ao final deste período, uma renda perpétua mensal de R\$ 1.000,00? Faça ainda uma análise de sensibilidade, mesclando ainda opções de 10 e de 20 anos com as de juros mensais de 0,5% e 1% e tire as suas conclusões.

Ao modelarmos as fórmulas financeiras para encontrarmos um “X” genérico que resolva este problema, temos:

$$F = X \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} = \frac{1.000}{i} \Rightarrow X = \frac{1.000}{(1+i)^n - 1}$$

Assim, o “X” responde diretamente à pergunta: “Quanto devemos investir?” A variável foi isolada, criando, deste modo, uma equação de modelagem.

Conforme a perspectiva de uma análise de sensibilidade, realizam-se as seguintes simulações:

$$n = 240 \text{ meses e } i = 0,5\% \text{ a.m.} \Rightarrow X = \frac{1.000}{(1,005)^{240} - 1} = 432,86$$

¹¹ Esta fórmula do Valor Atual ou Presente (P) é obtida com a utilização do cálculo infinitesimal aplicado a uma soma de termos de uma Progressão Geométrica (PG) infinita.

$$n = 240 \text{ meses e } i = 1\% \text{ a. m.} \Rightarrow X = \frac{1.000}{(1,01)^{240} - 1} = 101,09$$

$$n = 120 \text{ meses e } i = 0,5\% \text{ a. m.} \Rightarrow X = \frac{1.000}{(1,005)^{120} - 1} = 1.220,41$$

$$n = 120 \text{ meses e } i = 1\% \text{ a. m.} \Rightarrow X = \frac{1.000}{(1,005)^{120} - 1} = 434,71$$

Com estas observações, conclui-se que, aumentando o prazo ou a taxa de juros, o valor das contribuições se reduz com, praticamente, o mesmo nível de sensibilidade. Para uma análise mais precisa, seria necessária a ampliação das simulações numéricas.

Se a questão fosse: uma contribuição previdenciária mensal de R\$ 200,00 durante 30 anos em uma aplicação financeira com uma taxa líquida de 1% ao mês (descontados o imposto de renda e as tarifas bancárias), daria uma aposentadoria mensal de quanto? (Suponha que as contribuições sejam fixas e ininterruptas e que a aposentadoria se constitua como uma renda perpétua a uma taxa equivalente de 0,5% ao mês).

Contruir novos problemas a partir de um problema inicial também está na perspectiva da Modelagem Matemática.

Assim, para o exemplo anterior, a resolução é a seguinte:

$$R = 200 \times \frac{(1,01)^{360} - 1}{0,01} \times 0,005 \cong 3.494,96$$

Este resultado significa que daqui a 30 anos teremos uma renda mensal e constante de R\$ 3.494,96, renda, que trazida a Valor Presente, representaria hoje (hipoteticamente falando) o valor de R\$ 97,22.

Supondo ainda que as rendas a serem pagas, mensalmente, daqui a 30 anos tenham uma recomposição dada por uma inflação mensal de 0,3% nesta época, a primeira renda¹² a ser recebida seria de R\$ 1.391,03, como detalhado no cálculo a seguir:

$$R' = 200 \times \frac{(1,01)^{360} - 1}{0,01} \times \frac{(0,005 - 0,003)}{1,005} \cong 1.391,03$$

¹² As demais rendas, a partir da primeira, terão reajuste 0,3% ao mês.

Este cálculo fundamenta-se no resultado literal deduzido no exercício a seguir.

Considerando a manipulação matemática com expressões literais, que pode ser realizada também em um contexto da modelagem, tem-se o seguinte exercício de aplicação:

Seja uma renda perpétua cujos termos crescem a uma taxa f constante, sendo o seu primeiro termo a . Supondo a taxa de juros i , que é, numericamente, superior à taxa f , qual é o valor da renda na época do primeiro pagamento? (MORGADO *et al.*, 2015, p.80)

Neste exercício, a aplicação imediata das fórmulas não é suficiente, pois requer uma manipulação matemática em relação ao limite da soma dos termos de uma Progressão Geométrica (PG) infinita.

A solução que propomos é a seguinte:

$$X = a + \frac{a \cdot (1 + f)}{(1 + i)} + \frac{a \cdot (1 + f)^2}{(1 + i)^2} + \frac{a \cdot (1 + f)^3}{(1 + i)^3} + \dots$$

$$X = \frac{a}{\left(1 - \frac{1+f}{1+i}\right)} = \frac{a}{\left(\frac{i-f}{1+i}\right)} = \frac{a \cdot (1 + i)}{(i - f)}$$

Em relação ao tópico de **Amortizações**, não se introduz nenhuma nova fórmula financeira, sendo necessário apenas o domínio de conteúdos anteriores da Matemática Financeira, já que este costuma ser o último tópico da disciplina. Consultar o ANEXO.

Neste assunto, são sistematizados diferentes processos de extinção de dívidas por meio da realização de pagamentos periódicos, de maneira que cada prestação possui duas parcelas: uma de amortização da dívida e a outra dos juros.

Assim, na amortização, do ponto de vista da Matemática Financeira, há apenas uma organização e sistematização dos conteúdos financeiros para o enfoque no pagamento das dívidas (**amortizações + juros**).

Este conteúdo pode ser bem trabalhado com o Excel por meio da construção de tabelas e de fórmulas para os diferentes padrões matemáticos de extinção de dívidas.

Seguem os seguintes exemplos de aplicação resolvidos e que podem ser utilizados no Ensino Médio:

- a) Uma empresa tomou um empréstimo bancário de R\$ 500.000,00 para pagamento em 3 parcelas anuais e iguais, sendo a 1ª daqui a 1 ano e com uma taxa anual de 20%. Qual o valor das parcelas?

K	SALDO DEVEDOR (S_k)	PRESTAÇÃO (P_k)	JUROS PAGOS (J_k)	AMORTIZAÇÕES (A_k)
0	500.000	-	-	-
1	$600.000 - X$	X	100.000	$X - 100.000$
2	$720.000 - (2,2).X$	X	$120.000 - (0,2).X$	$(1,2).X - 120.000$
3	$864.000 - (3,64).X$	X	$144.000 - (0,44).X$	$(1,44).X - 144.000$

Pode-se afirmar que $864.000 - (3,64).X = 0$ e, assim, $X = \text{R\$ } 237.362,64$ (valor das parcelas).

K	SALDO DEVEDOR (S_k)	PRESTAÇÃO (P_k)	JUROS PAGOS (J_k)	AMORTIZAÇÕES (A_k)
0	500.000,00	-	-	-
1	362.637,36	237.362,64	100.000,00	137.362,64
2	197.802,19	237.362,64	72.527,47	164.835,17
3	-	237.362,64	39.560,44	197.802,20

- b) Roberto obtém um financiamento na compra de um apartamento, que deverá ser pago em 100 prestações mensais e iguais de R\$ 3.500,00, de modo que cada prestação possui uma parcela de juros pagos e outra de valor amortizado da dívida. Sabendo que a 1ª prestação possui uma parcela de juros de R\$ 2.000,00; a 2ª possui uma parcela de juros de R\$ 1.980,00; e, genericamente, em cada mês, os juros pagos são R\$ 20,00 inferiores aos da prestação anterior, calcule o total dos juros pagos e o valor da dívida. (IEZZI *et al.*, 2013 com modificações)

K	SALDO DEVEDOR (S_k)	PRESTAÇÃO (P_k)	JUROS PAGOS (J_k)	AMORTIZAÇÕES (A_k)
0	X	-	-	-
1	$X - 1.500$	3.500,00	2.000,00	1.500,00
2	$X - 3.020$	3.500,00	1.980,00	1.520,00
3	$X - 4.560$	3.500,00	1.960,00	1.540,00

$$J_k = 2.000 + (k - 1) \cdot (-20) \Rightarrow \begin{cases} J_1 = 2.000 \\ J_{100} = 20 \end{cases}$$

O total dos juros é:

$$\frac{(2.000 + 20)}{2} \times 100 = 101.000$$

$$A_k = 1.500 + (k - 1) \cdot 20 \Rightarrow \begin{cases} A_1 = 1.500 \\ A_{100} = 3.480 \end{cases}$$

O valor da dívida é:

$$\frac{(1.500 + 3.480)}{2} \times 100 = 249.000$$

- c) Um empréstimo de R\$ 100.000,00 deverá ser pago em 5 prestações anuais pelo Sistema de Amortização Constante (SAC) a uma taxa de juros de 12% ao ano. Se a 1ª prestação vence dentro de um ano, calcule os valores das prestações.

K	SALDO DEVEDOR (S_k)	PRESTAÇÃO (P_k)	JUROS PAGOS (J_k)	AMORTIZAÇÕES (A_k)
0	100.000,00	-	-	-
1	80.000,00	32.000,00	12.000,00	20.000,00
2	60.000,00	29.600,00	9.600,00	20.000,00
3	40.000,00	27.200,00	7.200,00	20.000,00
4	20.000,00	24.800,00	4.800,00	20.000,00
5	-	22.400,00	2.400,00	20.000,00

- d) Refaça o exercício anterior, utilizando os seus dados e considere agora o Sistema Francês (Tabela Price), em que as prestações são iguais e postecipadas.

K	SALDO DEVEDOR (S_k)	PRESTAÇÃO (P_k)	JUROS PAGOS (J_k)	AMORTIZAÇÕES (A_k)
0	100.000,00	-	-	-
1	84.259,03	27.740,97	12.000,00	15.740,97
2	66.629,14	27.740,97	10.111,08	17.629,89
3	46.883,67	27.740,97	7.995,50	19.745,47
4	24.768,74	27.740,97	5.626,04	22.114,93
5	-	27.740,97	2.972,24	24.768,73

1.2.4 Outras perspectivas das modelagens aplicadas à Matemática Financeira

A Matemática Financeira costuma requerer, na resolução de problemas, conexão com outros ferramentais matemáticos para sua melhor instrumentalização.

Por exemplo: normalmente, em problemas de capitalização composta é preciso o conhecimento sobre os logaritmos (consultar APÊNDICE B) e as suas propriedades para a “remoção de incógnitas” dos expoentes, a fim de que se trabalhe, de forma mais prática, com as equações financeiras modeladas.

Neste sentido, um problema clássico que pode ser proposto é o seguinte:

Deste modo, apresenta-se um exemplo com motivação histórica: em um pergaminho da Mesopotâmia, datado de 1.700 a.C., hoje no Museu do Louvre, encontra-se a seguinte pergunta: “Quanto tempo levará para uma soma de dinheiro para dobrar se investida a 20% ao ano e com os juros computados anualmente?” (JANOS, 2011, p.142)

Este problema pode ser pensado por meio de aumentos sucessivos de 20% até que se atinja um valor maior ou igual a um montante de 200% a juros compostos:

$$X \rightarrow (1,2).X \rightarrow (1,2)^2.X = 1,44.X \rightarrow (1,2)^3.X = 1,728.X \rightarrow (1,2)^4.X = 2,0736.X$$

Assim, o tempo t possui a seguinte relação: $3 < t < 4$.

Contudo, se o tempo t for grande, esse método para determinação do prazo fica inviável e a utilização dos logaritmos para o cálculo de t torna-se obrigatória, como é feito a seguir:

$$(1,2)^t.X = 2.X \Rightarrow (1,2)^t = \frac{2.X}{X} = 2 \Rightarrow \ln(1,2)^t = \ln(2)$$

$$t.\ln(1,2) = \ln(2) \Rightarrow t = \frac{\ln(2)}{\ln(1,2)} \cong \frac{0,69315}{0,18232} \cong 3,8 \Rightarrow 3 < t < 4$$

Logo, pode-se generalizar a ideia de se determinar um tempo t de uma aplicação financeira que possui uma taxa i com capitalização composta, um capital inicial C e um montante M através do seguinte desenvolvimento algébrico:

$$M = C \cdot (1 + i)^t \Rightarrow (1 + i)^t = \left(\frac{M}{C}\right) \Rightarrow \ln(1 + i)^t = \ln\left(\frac{M}{C}\right)$$

$$t \cdot \ln(1 + i) = \ln\left(\frac{M}{C}\right) \Rightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{M}{C}\right)}{\ln(1 + i)} = \frac{\ln(M) - \ln(C)}{\ln(1 + i)}$$

Se for possível estabelecer uma relação entre M e C , de modo de que se tenha $M = k \cdot C$ com k sendo um valor constante, temos o seguinte:

$$\begin{aligned} \ln(M) - \ln(C) &= t \cdot \ln(1 + i) \\ \ln(k \cdot C) - \ln(C) &= t \cdot \ln(1 + i) \\ \ln(k) + \underbrace{\ln(C) - \ln(C)}_{=0} &= \ln(k) = t \cdot \ln(1 + i) \\ t \cdot \ln(1 + i) = \ln(k) &\Rightarrow t = \frac{\ln(k)}{\ln(1 + i)} \end{aligned}$$

Como $\ln(k)$ também é um valor constante, o cálculo de t depende apenas do valor da variável de taxa: i . Isto se aplica a enunciados de problemas em que se dá um montante, que é o dobro de um capital inicial ou o triplo de um capital inicial, etc.

O desenvolvimento do conceito de Taxa Interna de Retorno (TIR) referente a uma sequência de capitais $C_0, C_1, \dots, C_t$ é uma outra boa oportunidade de aplicação da Matemática Financeira em contextos de modelagem.

Sabemos que a TIR nos fornece um procedimento metodológico para o cálculo de uma taxa $i > 0$, que verifica a seguinte equação financeira:

$$\sum_{k=0}^t \frac{C_k}{(1 + i)^k} = 0$$

Considerando $x = \left(\frac{1}{1+i}\right)$, temos o seguinte polinômio de grau t :

$$p(x) = C_0 + C_1x + \dots + C_tx^t$$

Caso existam raízes reais positivas para este polinômio e sejam denotadas por x' , os valores candidatos desta taxa de retorno são:

$$\text{TIR} = \frac{1}{x'} - 1$$

São exemplos de atividades que exploram, conceitualmente, a TIR:

- a) Indique, a partir da modelagem da TIR, o seu cálculo para um investimento de R\$ 225.000,00 em que os retornos são: R\$ 75.000,00 em 3 anos, R\$ 105.000,00 em 5 anos, R\$ 150.000,00 em 7 anos e R\$ 165.000,00 em 9 anos.

Fazendo $x = \frac{1}{1+i}$ e $11x^9 + 10x^7 + 7x^5 + 5x^3 - 15 = 0 \rightarrow$ caso existam raízes reais positivas, vamos denotá-las por x' . Assim: $TIR = \frac{1}{x'} - 1$.

- b) Verifique se um investimento de R\$ 50.000,00 com retorno de R\$100.000,00 em 1 ano e uma despesa extraordinária de R\$ 100.000,00 em 2 anos possui um valor calculável em termos de TIR.

Fazendo $x = \frac{1}{1+i}$, temos: $-2x^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4-4 \cdot 2 \cdot 1}}{4}$

Portanto, x não possui raízes reais e não há como calcular a TIR associada a esta situação financeira.

Uma outra atividade de modelagem que mostra a importância das demonstrações matemáticas para a “descoberta” de novas fórmulas:

Seja uma renda de n parcelas mensais em progressão aritmética de razão r com o primeiro termo P a taxa de juros ao mês i , determinar o valor desta renda um mês antes da época do fluxo financeiro referente à primeira prestação. (MORGADO *et al.*, 2015, p.80)

A solução que desenvolvemos é a seguinte:

$$A = \frac{P}{(1+i)} + \frac{P+r}{(1+i)^2} + \frac{P+2r}{(1+i)^3} + \dots + \frac{P+(n-1).r}{(1+i)^n}$$

$$\frac{A}{(1+i)} = \frac{P}{(1+i)^2} + \frac{P+r}{(1+i)^3} + \frac{P+2r}{(1+i)^4} + \dots + \frac{P+(n-1).r}{(1+i)^{n+1}}$$

$$A - \frac{A}{(1+i)} = \frac{A \cdot i}{(1+i)}$$

$$\frac{A \cdot i}{(1+i)} = \frac{P}{(1+i)} - \frac{P+(n-1).r}{(1+i)^{n+1}} + \frac{r}{(1+i)^2} + \frac{r}{(1+i)^3} + \dots + \frac{r}{(1+i)^n}$$

$$\frac{A \cdot i}{(1+i)} = \frac{P \cdot (1+i)^n - P - (n-1).r}{(1+i)^{n+1}} + \frac{\frac{r}{(1+i)^2} \cdot \left[\left(\frac{1}{1+i} \right)^{n-1} - 1 \right]}{\frac{1}{1+i} - 1}$$

$$\frac{A \cdot i}{(1+i)} = \frac{P \cdot (1+i)^n - P - (n-1).r}{(1+i)^{n+1}} - \frac{r}{(1+i) \cdot i} \cdot \left[\frac{1}{(1+i)^{n-1}} - 1 \right]$$

$$\begin{aligned}
A &= \frac{P \cdot (1+i)^n - P - (n-1) \cdot r}{(1+i)^n \cdot i} - \frac{r}{i^2} \cdot \left[\frac{(1+i)}{(1+i)^n} - 1 \right] \\
A &= \frac{P}{i} - \frac{P + n \cdot r - r}{i} \cdot (1+i)^{-n} - \frac{r + r \cdot i}{i^2} \cdot (1+i)^{-n} + \frac{r}{i^2} \\
A &= \frac{P}{i} - \frac{P}{i} \cdot (1+i)^{-n} + \frac{r}{i^2} - \frac{r}{i^2} \cdot (1+i)^{-n} - \frac{(n \cdot r - r + r)}{i} \cdot (1+i)^{-n} \\
A &= \frac{P}{i} \cdot [1 - (1+i)^{-n}] + \frac{r}{i^2} \cdot [1 - (1+i)^{-n}] - \frac{n \cdot r \cdot (1+i)^{-n}}{i} \\
A &= \left(P + \frac{r}{i} \right) \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} - \frac{n \cdot r \cdot (1+i)^{-n}}{i}
\end{aligned}$$

As demonstrações têm ainda o papel de trabalhar o significado de fórmulas conhecidas, como apresentado no seguinte desenvolvimento teórico para as fórmulas das rendas certas postecipadas:

$$\begin{aligned}
P &= \frac{R}{1+i} + \frac{R}{(1+i)^2} + \dots + \frac{R}{(1+i)^n} \\
X &= \frac{R}{1+i} \Rightarrow P = X + X \cdot (1+i)^{-1} + \dots + X \cdot (1+i)^{n-1}
\end{aligned}$$

Deste modo, consegue-se perceber, mais facilmente, a formação de uma Progressão Geométrica (PG) de termo inicial a_1 e razão q da série anterior:

$$\text{PG} \rightarrow a_1 = X \text{ e } q = (1+i)^{-1}$$

Modelando as fórmulas com o conhecimento de PG (definição e propriedades), temos:

$$\text{PG: } (a_1, a_1 \cdot q, \dots, a_1 \cdot q^{n-1}) \rightarrow \begin{cases} a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \\ S_n = a_1 + a_1 \cdot q + \dots + a_1 \cdot q^{n-1} \\ q \cdot S_n = a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \dots + a_1 \cdot q^n \\ q \cdot S_n - S_n = (q-1) \cdot S_n = a_1 \cdot q^n - a_1 \\ \Updownarrow \\ S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1} = \frac{X \cdot ((1+i)^{-n} - 1)}{(1+i)^{-1} - 1} \end{cases}$$

$$P = X \cdot \frac{(1+i)^{-n} - 1}{(1+i)^{-1} - 1} \cdot \frac{(-1)}{(-1)} = \frac{R}{(1+i)} \cdot \frac{[1 - (1+i)^{-n}]}{[1 - (1+i)^{-1}]} = R \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n}}{1 + i - 1}$$

$$P = R \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

$$F = P \cdot (1+i)^n = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Na Revista do Professor de Matemática nº 66 – RPM 66 apresentou-se o artigo intitulado: **“Calcular prestações de uma dívida, como?”**

No artigo, destaca-se o seguinte problema, que pode ser utilizado como atividade de modelagem:

Um amigo meu, convicto da necessidade de adquirir um computador para desenvolver suas atividades profissionais, e não contando com os recursos financeiros para comprá-lo à vista, pesquisou sobre como poderia obter o dinheiro emprestado. Trouxe-me três alternativas, pedindo-me esclarecimentos que as justificassem, já que eram bastante díspares. Ele precisava de um empréstimo de R\$ 1.500,00 e estava disposto a pagá-lo em dez prestações mensais, sem entrada, isto é, pagando a primeira um mês depois do empréstimo.

- I) A primeira alternativa foi produzida por um agiota, que lhe informou que o seu dinheiro "valia 5% ao mês" a juros compostos, resultando em dez prestações de R\$ 244,33.
- II) A segunda alternativa foi produzida pela loja que vendia o computador, que informou estar cobrando uma taxa de 5% ao mês, resultando em dez prestações de R\$ 225,00.
- III) A terceira alternativa provinha de um banco que, para emprestar a quantia solicitada a juros compostos de 5%, cobrava dez prestações de R\$ 198,10.

Se a questão fosse qual a alternativa escolher, não haveria dúvida que a do caso III) seria a melhor. Mas como justificar cada uma dessas três contas?

No Caso I), temos: $VF = 1.500 \times (1 + 0,05)^{10} = 2.443,34$ com cada prestação sendo $R = \frac{2.443,34}{10} = 244,33$ (Houve uma capitalização composta de 5% a.m. projetada para 10 meses com o Montante dividido pelas 10 parcelas para se chegar ao valor de cada prestação).

No Caso II), temos: $VF = 1.500 \times (1 + (0,05) \times 10) = 2.250,00$ com cada prestação sendo $R = \frac{2.250,00}{10} = 225,00$ (Houve uma capitalização simples de 5% a.m. projetada para 10 meses com o Montante dividido pelas 10 parcelas para se chegar ao valor de cada prestação).

No Caso III), temos: $VP = 1.500,00$. Em $t = 0$ temos uma prestação associada $R_0 = \frac{1.500,00}{10} = 150,00$. Em $t = 1$, teríamos a 1ª Prestação $R_1 = 150 \times (1 + 0,05)$; em $t = 2$, a 2ª Prestação seria $R_2 = 150 \times (1 + 0,05)^2$ e, assim, sucessivamente, até $t = 10$, em que teríamos a 10ª Prestação $R_{10} = 150 \times (1 + 0,05)^{10}$. Portanto, neste caso, o Montante seria representado por:

$$VF = R_1 + R_2 + \dots + R_{10} = 150 \cdot (1,05) + 150 \cdot (1,05)^2 + \dots + 150 \cdot (1,05)^{10}$$

$$VF = 150 \times [1,05 + (1,05)^2 + \dots + (1,05)^{10}]$$

$$VF = 150 \times \left[\frac{1,05 \times ((1,05)^{10} - 1)}{1,05 - 1} \right] = 1.981,02 \therefore R = \frac{1.981,02}{10} = 198,10$$

Os cálculos apresentados explicitam as três lógicas financeiras utilizadas, porém, matematicamente, as três estão incorretas, visto que não consideram um Princípio Fundamental de Matemática Financeira:

A impossibilidade de se somar quantias financeiras de épocas diferentes.

Assim, o raciocínio apropriado para a questão levantada seria o seguinte:

Atualmente, a dívida é de R\$ 1.500,00 ($VP = 1.500,00$). Eu quero pagar essa dívida, considerando que, no 1º mês, pagarei um valor R para a prestação; no 2º mês, pagarei também um valor R e, assim, sucessivamente, até o 10º mês, de modo que todas as 10 prestações sejam iguais a R . Com estes dados e fazendo uma Equivalência de Capitais para a data focal zero, podemos escrever a seguinte equação:

$$1.500 = \frac{R}{1,05} + \frac{R}{(1,05)^2} + \dots + \frac{R}{(1,05)^{10}}$$

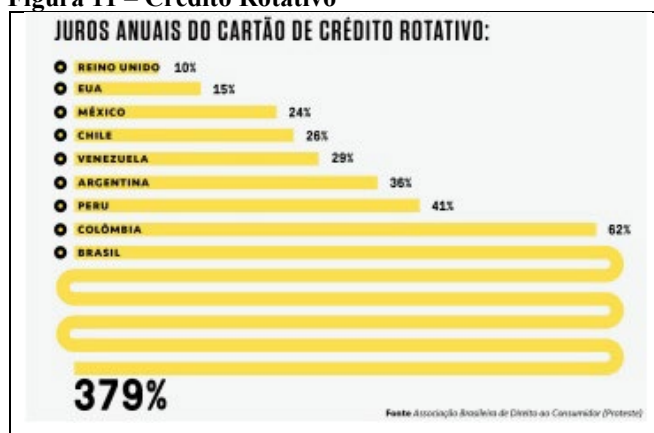
Observando o 2º membro da equação anterior, temos uma Progressão Geométrica de 1º termo $\frac{R}{1,05}$ e razão igual a $\frac{1}{1,05}$. Isso nos permite afirmar o seguinte:

$$1.500 = \frac{\frac{R}{1,05} \times \left[\left(\frac{1}{1,05} \right)^{10} - 1 \right]}{\frac{1}{1,05} - 1} \therefore R = \frac{1.500 \times 0,05}{1 - \frac{1}{(1,05)^{10}}} \therefore R = \mathbf{194,26}$$

Conforme uma perspectiva crítica, temos como possibilidade de atividade a seguinte:

No Brasil, as taxas de juros cobradas são muito altas quando as comparamos com as praticadas em outros lugares do mundo, como se observa no exemplo a seguir (Figura 11) dos juros do cartão de crédito rotativo:

Figura 11 – Crédito Rotativo



FONTE: Livro Aberto – Educação Financeira.

Reflita como estas taxas influenciam a vida dos brasileiros. Pesquise, no portal do Banco Central do Brasil, as taxas de juros cobradas pelos principais bancos brasileiros para diferentes modalidades de

crédito. Busque elementos para fundamentar por que a promoção de uma educação financeira crítica pode contribuir na melhoria da vida dos cidadãos.

E por fim, apresenta-se uma outra possibilidade de atividade de modelagem financeira a partir da interpretação de uma situação do cotidiano.

Nesta atividade, é importante buscar o entendimento das definições financeiras e da utilização das taxas corretas e da diferenciação entre os casos de anuidades e amortizações.

A modelagem fica a cargo do leitor e consiste na análise de uma fatura de cartão de crédito por meio da elaboração de um conjunto de perguntas possíveis a partir das situações financeiras apresentadas e suas respectivas respostas fundamentadas nas definições e nos cálculos financeiros. Na fatura, a sigla CET refere-se ao Custo Efetivo Total de uma operação bancária.

Os dados seguem, conforme a Tabela 6 a seguir:

Tabela 6 – Fatura de cartão de crédito

		Resumo da fatura em R\$	
		Total da fatura anterior	577,90
		Pagamento efetuado em 06/10/2022	- 577,90
		Saldo financiado	0,00
		Lançamentos atuais	217,24
		Total desta fatura	217,24
O total da sua fatura é:		Com vencimento em:	Limite total de crédito
R\$ 217,24		06/11/2022	61.790,00
			Limite utilizado no mês
			433,54
			Disponível para saque no Brasil
			1.000,00
			Disponível para saque no exterior
			7.000,00
Preparamos para você outras opções para pagamento da sua fatura:			
Pagamento mínimo:		Parcelas fixas:	
R\$ 32,59		R\$ 23,87	
		+23x R\$ 23,87	

Encargos cobrados nesta fatura Juros do rotativo 12,92 % 0,00 Juros de mora 1,00 % am 0,00 Multa por atraso 2,00 % 0,00 IOF de financiamento (0,38 % + 0,00820 % a.d.) 0,00			Pagamento total: é sempre a melhor opção porque não há cobrança de juros.		
Fique atento aos encargos para o próximo período (06/11 a 05/12)			Pagamento mínimo: você pode pagar o valor indicado no box ou um valor entre o valor indicado no box e o valor total da fatura e financiar o saldo restante pelo crédito rotativo. O saldo será cobrado na fatura seguinte com encargos (juros + IOF). Consulte a taxa aplicável e o CET antes da contratação.		
Juros Máximos do contrato 12,50 % am 319,14 % aa			Parcelas fixas: você pode parcelar sua fatura em parcelas fixas, conforme opções ofertadas. Para contratar, você precisa pagar o exato valor indicado até a data de vencimento da opção de parcelamento que você escolher. Este parcelamento inclui somente o valor total da fatura no momento da contratação e as demais transações serão lançadas normalmente nas faturas seguintes. As parcelas utilizarão o seu limite e vamos liberá-lo após o pagamento de cada parcela.		
Pagamento mínimo desta fatura Valor da fatura atual 217,24 Juros máximos do contrato 12,50 % am 319,14% aa Encargos em caso de pgto. mínimo (R\$) 23,08 CET do financiamento da fatura 13,13 % am 348,41 % aa Valor em R\$ % do total financiado Valor total financiado 184,65 100,00 % Valor do IOF 1,15 Valor total a pagar 208,88			Atraso: se você não pagar a fatura, não contratar um parcelamento de parcelas fixas ou pagar um valor menor que o pagamento mínimo até a data de vencimento, você estará em atraso e vamos te cobrar juros e encargos como (i) juros remuneratórios indicados na fatura como "juros máximo de financiamento" + juros moratórios de 1% ao mês capitalizados diariamente computados desde de data do vencimento até a data do pagamento, (ii) multa de 2% sobre os valores em aberto e (iii) impostos.		
Parcelas fixas desta fatura Valor da fatura atual 217,24 Juros do parcelamento 10,70 % am 244,45% aa CET do parcelamento 11,72 % am 285,12 % aa Valor em R\$ % do total financiado Valor total financiado* 224,69 100,00% Total a financiar (1) 217,24 96,68 % Valor do IOF (2) 6,26 3,32% Valor total a pagar 572,88			Parcelamento do saldo do cartão: se disponível, você pode contratar este parcelamento que é composto pelo (i) total da fatura atual; (ii) valor total dos parcelamentos de fatura e crédito pessoal contratados <u>sem</u> seguro e (iii) compras parcelas com e sem juros.		
(*) O valor total financiado é composto pela soma dos itens 1 e 2.					

FONTE: Acervo do autor (elaboração própria).

Em uma atividade de *investigação financeira* como esta, é oportuno que se utilizem, paralelamente às fórmulas, Planilhas e Calculadoras, de maneira a se explorar, cuidadosamente, estas tecnologias, apontando para os seus benefícios e detalhando as suas formas de utilização associadas às estratégias de cálculo aplicadas aos temas estudados.

Van de Walle (2009, p.130-132) defende que o uso das tecnologias traz muitos benefícios à aprendizagem matemática, pois, no contexto escolar, elas:

- Desenvolvem, consolidam e ampliam os conceitos matemáticos.
- Possuem diversas aplicações ao cotidiano dos alunos.
- São ferramentas adicionais para a resolução de problemas e modelagens.
- Podem despertar a curiosidade dos alunos, ampliando as possibilidades de simulação e de análise de sensibilidade em relação aos dados de um problema.
- Impactam na realização de atividades matemáticas com boa economia de tempo.

De fato, as práticas pedagógicas devem ser atualizadas, na medida do possível, para refletirem as transformações sociais e tecnológicas, que, em alguns casos, materializam-se em novas tecnologias disponíveis aos alunos.

Estas tecnologias podem auxiliar o professor a explorar as teorias matemáticas de uma maneira mais ampla, bem como podem melhor instigar a capacidade investigativa dos alunos.

Desta forma, segue um detalhamento do Excel e da calculadora HP-12C, instrumentos didáticos para a modelagem financeira, tendo, inclusive, importantes aplicações às atividades propostas neste trabalho. As suas funcionalidades estão resumidas na Tabela 7:

Tabela 7 – Instrumentos didáticos na modelagem financeira

	A HP-12C é uma calculadora com funções financeiras específicas e pode ser útil em atividades de modelagem. O site a seguir ensina, de um modo prático, as funções básicas da HP-12C: <https://fazaconta.com/calculadora-hp-12c-online.htm> Pode ser utilizada nos celulares através do aplicativo Touch Fin RPN (Calculadora RPN financeira). As suas principais <u>teclas financeiras</u> são: n, i, PV, PMT e FV, como detalhado a seguir: n refere-se ao prazo ou número de pagamentos; i é a taxa de juros no formato de porcentagem; - PV é o Valor Presente ou Valor Atual; - PMT é o valor da prestação de uma série; - FV é o Valor Futuro ou Montante. Observação: a calculadora no modo END considera o modelo postecipado e em BEGIN considera o modelo antecipado.
	O Excel realiza cálculos a partir de fórmulas financeiras que operacionalizam os deslocamentos do valor do dinheiro no tempo, considerando pagamentos e recebimentos com sinais contrários. Seguem algumas importantes fórmulas: $=VP(\text{taxa}; \text{per}; \text{pgto}; [\text{vf}]; [\text{tipo}^{13}]) \rightarrow$ retorna o Valor Presente a partir de uma série de Pagamentos constantes (PGTO) ou de um Valor Futuro (VF). $=VF(\text{taxa}; \text{nper}; \text{pgto}; [\text{vp}]; [\text{tipo}]) \rightarrow$ retorna o Valor Futuro a partir de uma série de Pagamentos constantes (PGTO) ou de um Valor Presente (VP). $=PGTO(\text{taxa}; \text{nper}; \text{vp}; [\text{vf}]; [\text{tipo}]) \rightarrow$ retorna o valor dos Pagamentos constantes a partir de um Valor Presente (VP) ou de um Valor Futuro (VF). $=NPER(\text{taxa}; \text{pgto}; \text{vp}; [\text{vf}]; [\text{tipo}]) \rightarrow$ retorna o Número de períodos de uma série uniforme a partir de um Valor Presente (VP) ou de um Valor Futuro (VF).

FONTE: Acervo do autor (elaboração própria).

1.2.5 Educação Financeira e Matemática Financeira na BNCC

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é o documento, de **caráter nacional**, que busca a **normatização** e a **padronização** das aprendizagens a serem desenvolvidas pelos alunos durante os seus nove anos de Ensino Fundamental e os três anos de Ensino Médio. Neste sentido, a BNCC busca detalhar um conjunto de competências a serem trabalhadas nas diferentes disciplinas e etapas escolares. (grifos nossos)

¹³ Na variável tipo, deve-se inserir 0 para os modelos postecipados e 1 para os modelos antecipados.

A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB, Lei nº 9.394/1996) estabeleceu que “os currículos da Educação Infantil, do Ensino Fundamental e do Ensino Médio deviam ter uma *base nacional comum*.” (BRASIL, 2018, p.11, grifo do autor). Neste sentido, a necessidade de formulação da BNCC já estava prevista no texto da LDB de 1996.

A LDB apresenta as seguintes finalidades para o Ensino Médio:

A consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos ao longo do Ensino Fundamental, a preparação para o trabalho e o exercício da cidadania, o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico e o entendimento mais aprofundado sobre as aplicações práticas das teorias estudadas.” (BRASIL, 2018, p.464)

O PCN+ do Ensino Médio¹⁴ para as Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, documento anterior à BNCC, possui o seguinte destaque sobre o aprendizado da Matemática no que tange à mobilização de conhecimentos e habilidades em busca do pleno exercício da cidadania:

Aprender Matemática de uma forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos traz em si o desenvolvimento de competências e habilidades que são essencialmente formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para compreender e interpretar situações, para se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras ações necessárias à sua formação. (BRASIL, 2002, p.111)

Analisando o conteúdo da BNCC, verifica-se a definição de **competência**, aplicável a este normativo, por meio de um significado mais amplo e integrado: “refere-se à mobilização de **conhecimentos** (conceitos e procedimentos), **habilidades** (práticas cognitivas e socioemocionais), **atitudes** e **valores** para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho.” (BRASIL, 2018, p.8, grifo nosso)

Esta definição de competência da BNCC alinha-se, em termos gerais, à perspectiva da Modelagem Matemática no ambiente escolar.

¹⁴ PCN+ do Ensino Médio trata-se de um documento educacional, de natureza orientadora para os docentes, apresentando foco no detalhamento dos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM), documento publicado em 1999.

O texto da BNCC destaca ainda o seguinte aspecto defendido na Constituição Federal de 1988:

A educação deve ser reconhecida como um **direito fundamental** dos cidadãos brasileiros, devendo focalizar nas aprendizagens dos **conteúdos mínimos**, a fim de que se atinjam os seguintes objetivos educacionais: o pleno desenvolvimento da pessoa, o seu preparo para o **exercício da cidadania** e a sua **qualificação para o trabalho**. (BRASIL, 2018, p.10, grifo nosso)

Ainda que pesem as desigualdades sociais e a diversidade cultural no País, a BNCC foi concebida por meio de um pacto interfederativo para a uniformização dos conteúdos escolares a serem abordados com ênfase no desenvolvimento de uma maior capacidade analítico-crítica dos alunos.

Deste modo, na BNCC, envidaram-se esforços para o atendimento de questões centrais da Constituição sobre temas educacionais, o que se observa nos seus pressupostos pedagógicos (BRASIL, 2018, p.13-14, grifos nossos):

- I) **Foco no desenvolvimento de competências** – a explicitação das competências oferece referências para o fortalecimento de ações que assegurem as aprendizagens essenciais.
- II) **Compromisso com a educação integral** – relaciona-se à construção intencional de processos educativos que promovam aprendizagens sintonizadas com as necessidades e os interesses dos estudantes e, também, com os desafios da sociedade contemporânea.

Neste processo educativo, destaca-se: o que aprender, para que aprender, como ensinar, como promover redes de aprendizagem colaborativa e como avaliar o aprendizado.

A BNCC sugere algumas ações para a melhoria do trabalho do professor, que são consistentes com os pressupostos de uma aula mediada pela Modelagem Matemática. Por exemplo, podem-se citar (grifos nossos):

- ✓ **Contextualização dos componentes curriculares** em associação a certas estratégias pedagógicas, tais como: formas criativas de apresentação dos conteúdos, exemplificações com foco no enriquecimento conceitual e conexões com a realidade para melhor fixação dos temas e engajamento dos alunos.
- ✓ **Condução de aulas com elementos motivacionais e de engajamento**, colocando, em prática, situações e procedimentos do cotidiano na sala de aula.

- ✓ **Seleção, produção, aplicação e avaliação de recursos didáticos**, incluindo os tecnológicos para apoio do processo de ensino-aprendizagem

Convém ressaltar que as dez *Competências Gerais da Educação Básica* relacionadas na BNCC, abrangendo “a construção de conhecimentos, o desenvolvimento de habilidades e a formação de atitudes e valores”, estão amparadas nos termos da LDB e, dentre estas Competências (todas de mesma importância), destacamos as seguintes (BRASIL, 2018, p.9, grifos nossos):

- a) **Exercitar a curiosidade intelectual** e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.
- b) Compreender, utilizar e criar **tecnologias digitais** de informação e comunicação de forma **crítica, significativa, reflexiva e ética** nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.

A definição, a seguir, do Livro Aberto do IMPA para Educação Financeira em Contextos Escolares (EFCE) encontra ainda respaldo na BNCC:

Abrange um processo educativo complexo, desenvolvido a partir de um conjunto de estratégias direcionadas ao ambiente escolar, considerando diversos aspectos: matemáticos, não matemáticos, didáticos e multidisciplinares.” (IMPA, 2020, p.1).

Conforme IMPA (2020, grifo nosso), o Livro Aberto possui a seguinte justificativa para a inclusão de um currículo mais consistente e transdisciplinar no que se refere à Educação Financeira: é importante que os educadores matemáticos percebam que, cada vez mais, estamos imersos, diariamente, em diferentes **situações financeiras e econômicas** que englobam consumo, poupança e investimentos, as quais se conectam com as nossas análises preliminares e escolhas.

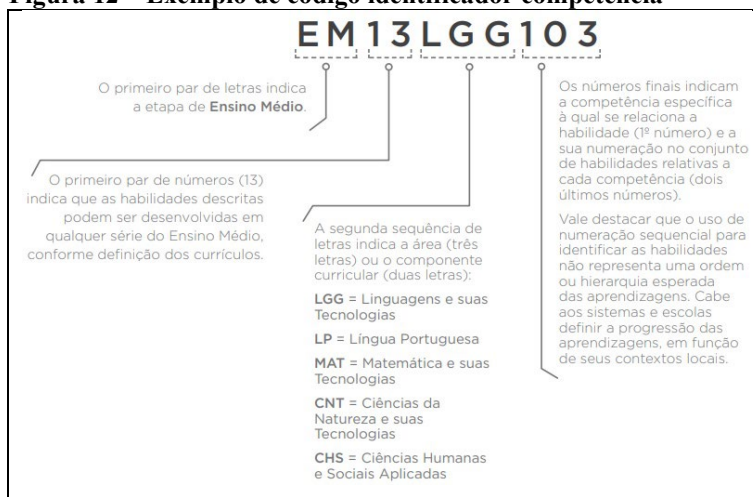
Neste sentido, os professores que ensinam matemática têm sido desafiados a gerarem conteúdos que produzam conexões didáticas com a Educação Básica por meio do ensino de

matemática, convidando os estudantes a refletirem sobre possíveis consequências de suas decisões em relação às suas demandas e necessidades.

Há convergência entre vários elementos teóricos da Modelagem Matemática (ou mais especificamente da Matemática Financeira em um ambiente de modelagem) e os apresentados na BNCC, analisando, por exemplo, a moderna e pragmática definição de Barbosa (2001, p.6, grifo nosso): “Modelagem é um **ambiente de aprendizagem** no qual os alunos são convidados a indagar e/ou investigar, por meio da matemática, situações oriundas de outras áreas da realidade.”

Do ponto de vista da organização do seu conteúdo, a BNCC elenca as aprendizagens básicas e as expressa por meio de códigos alfanuméricos identificadores de competências com recorte por disciplina e etapa escolar, agregando um conjunto de conhecimentos considerados essenciais. Segue, na Figura 12, a exemplificação de um código identificador:

Figura 12 – Exemplo de código identificador competência



FONTE: BRASIL, 2018.

Para BNCC, destacamos as seguintes habilidades para a Matemática Financeira, Educação Financeira e temas matemáticos relacionados, que requerem dos atuais professores novas competências financeiras e tecnológicas:

- (EF07MA02) Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, como os que lidam com acréscimos e decréscimos simples, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, no contexto de educação financeira, entre outros.
- (EF09MA05) Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com a ideia de aplicação de percentuais sucessivos e a determinação das taxas percentuais, preferencialmente com o uso de tecnologias digitais, no contexto da educação financeira.
- (EM13MAT104) Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica (índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros), investigando os processos de cálculo desses números, para analisar criticamente a realidade e produzir argumentos.

- (EM13MAT203) Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões.
- (EM13MAT303) Interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos, por meio de representações gráficas ou análise de planilhas, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso.
- (EM13MAT304) Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.
- (EM13MAT305) Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros.
- (EM13MAT507) Identificar e associar Progressões Aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.
- (EM13MAT508) Identificar e associar Progressões Geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

É importante ressaltar que a maior parte destas habilidades financeiras foi explorada com o desenvolvimento teórico deste trabalho no que tange à Matemática Financeira na perspectiva da modelagem. Dentre as habilidades mencionadas, destacam-se as dos seguintes códigos identificadores: EM13MAT203; EM13MAT303; EM13MAT304; e EM13MAT305.

Assim, neste desenvolvimento teórico, houve uma sistematização destas habilidades por meio de algumas aplicações conceituais e consolidação através de uma abordagem crítico-reflexiva.

As habilidades financeiras apontadas buscam a instrumentalização para:

- a) Interpretação de situações que envolvam os Fatores de Correção, bem como a caracterização e a diferenciação dos regimes de capitalização simples e composta.
- b) Ênfase nas aplicações da Matemática Financeira, inclusive com auxílio de tecnologias digitais.
- c) Estímulo à argumentação com base em conceitos financeiros.
- d) Análise crítica da realidade e de situações econômicas e sociais em geral.

Embora o trabalho do professor não esteja circunscrito ao treinamento para a realização de exames, tendo um papel mais amplo, faremos uma análise sobre um conjunto de questões

de Matemática Financeira atuais para verificar o nível de aderência das avaliações nacionais às competências financeiras apresentadas.

Esta análise objetiva a verificação, em termos gerais, dos novos desafios trazidos pela BNCC para professores e alunos.

Seguem algumas questões selecionadas de exames recentes com as suas soluções simplificadas e com a análise pelas habilidades financeiras das BNCC apresentadas nesta parte do trabalho:

UERJ – 1º Exame de Qualificação - 2016	
Questão 27. Um índice de inflação de 25% (em um determinado período de tempo) indica que, em média, os preços aumentaram 25% nesse período. Um trabalhador que antes podia comprar uma quantidade X de produtos, com a inflação e sem aumento salarial, só poderá comprar agora uma quantidade Y dos mesmos produtos, sendo $Y < X$. Com a inflação de 25%, a perda do poder de compra desse trabalhador é de: (A) 20% (B) 30% (C) 50% (D) 80%	
Com o Salário S, um trabalhador adquire X produtos. que têm um preço P; sem reajuste salarial, só pode adquirir Y produtos ($Y < X$), já que a inflação aumentou os preços para 1,25 P. $S = P.X = (P + 0.25.P).Y \Leftrightarrow P.X = (1,25).P.Y \Leftrightarrow Y = \left(\frac{4}{5}\right)X \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow Y = \left(\frac{4}{5}\right)X = (80\%).X \Leftrightarrow X - Y = (20\%).X$ Logo, a perda foi de 20%. RESPOSTA: “A” (HABILIDADES FINANCEIRAS – BNCC: EF09MA05 / EM13MAT104)	
ENEM 2017	
QUESTÃO 136 Um empréstimo foi feito à taxa mensal de $i\%$, usando juros compostos, em oito parcelas fixas e iguais a P. O devedor tem a possibilidade de quitar a dívida antecipadamente a qualquer momento, pagando para isso o valor atual das parcelas ainda a pagar. Após pagar a 5ª parcela, resolve quitar a dívida no ato de pagar a 6ª parcela. A expressão que corresponde ao valor total pago pela quitação do empréstimo é ☐ A $P \left[1 + \frac{1}{\left(1 + \frac{i}{100}\right)} + \frac{1}{\left(1 + \frac{i}{100}\right)^2} \right]$ ☐ B $P \left[\frac{1}{\left(1 + \frac{i}{100}\right)} + \frac{1}{\left(1 + \frac{2i}{100}\right)} + \frac{1}{\left(1 + \frac{3i}{100}\right)} \right]$ ☐ C $P \left[1 + \frac{1}{\left(1 + \frac{i}{100}\right)} + \frac{1}{\left(1 + \frac{2i}{100}\right)} \right]$ ☐ D $P \left[\frac{1}{\left(1 + \frac{i}{100}\right)} + \frac{1}{\left(1 + \frac{i}{100}\right)^2} + \frac{1}{\left(1 + \frac{i}{100}\right)^3} \right]$ ☐ E $P \left[1 + \frac{1}{\left(1 + \frac{i}{100}\right)^2} + \frac{1}{\left(1 + \frac{i}{100}\right)^2} \right]$	
O Valor para Quitação é o Valor Presente (VP): $VP = P + \frac{P}{\left(1 + \frac{i}{100}\right)} + \frac{P}{\left(1 + \frac{i}{100}\right)^2} = P \cdot \left[1 + \frac{1}{\left(1 + \frac{i}{100}\right)} + \frac{1}{\left(1 + \frac{i}{100}\right)^2} \right]$ RESPOSTA: “A” (HABILIDADES FINANCEIRAS – BNCC: EF09MA05 / EM13MAT508)	

ENEM 2018

QUESTÃO 165

Um contrato de empréstimo prevê que quando uma parcela é paga de forma antecipada, conceder-se-á uma redução de juros de acordo com o período de antecipação. Nesse caso, paga-se o valor presente, que é o valor, naquele momento, de uma quantia que deveria ser paga em uma data futura. Um valor presente P submetido a juros compostos com taxa i , por um período de tempo n , produz um valor futuro V determinado pela fórmula

$$V = P \cdot (1 + i)^n$$

- A 56ª
 B 55ª
 C 52ª
 D 51ª
 E 45ª

Em um contrato de empréstimo com sessenta parcelas fixas mensais, de R\$ 820,00, a uma taxa de juros de 1,32% ao mês, junto com a trigésima parcela será paga antecipadamente uma outra parcela, desde que o desconto seja superior a 25% do valor da parcela.

Utilize 0,2877 como aproximação para $\ln\left(\frac{4}{3}\right)$ e 0,0131 como aproximação para $\ln(1,0132)$.

A primeira das parcelas que poderá ser antecipada junto com a 30ª é a

$$\begin{aligned}
 \frac{p}{(1 + 1,32\%)^n} &= \frac{p}{(1,0132)^n} \\
 D = p - \frac{p}{(1,0132)^n} &> (25\%) \cdot p \Leftrightarrow (0,75) \cdot p > \frac{p}{(1,0132)^n} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow (1,0132)^n &> \frac{4}{3} \Leftrightarrow \ln(1,0132)^n > \ln\left(\frac{4}{3}\right) \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow n \cdot \underbrace{\ln(1,0132)}_{=0,0131} &> \ln\left(\frac{4}{3}\right) = 0,2877 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow n \cdot (0,0131) &> 0,2877 \Leftrightarrow n > \frac{0,2877}{0,0131} = 21,96 \Leftrightarrow n > 22
 \end{aligned}$$

A primeira das parcelas que poderá ser antecipada junto com a 30ª é a parcela de número: $30 + 22 = 52$.

RESPOSTA: “C” (HABILIDADES FINANCEIRAS – BNCC: EM13MAT304 / EM13MAT305)

FUVEST 2018 – 1ª Fase

Questão 31. Maria quer comprar uma TV que está sendo vendida por R\$ 1.500,00 à vista ou em 3 parcelas mensais “sem juros” de R\$ 500,00. O dinheiro que Maria reservou para essa compra não é suficiente para pagar à vista, mas descobriu que o banco oferece uma aplicação financeira que rende 1% ao mês. Após fazer os cálculos, Maria concluiu que, se pagar a primeira parcela e, no mesmo dia, aplicar a quantia restante, conseguirá pagar as duas parcelas que faltam sem ter que colocar nem tirar um centavo sequer. Quanto Maria reservou para essa compra, em reais?

- (A) 1.450,20 (B) 1.480,20 (C) 1.485,20 (D) 1.495,20 (E) 1.490,20

1ª Parcela = R\$ 500,00 → sobram $(x - 500)$

2ª Parcela = R\$ 500,00 → sobram $(x - 500) \cdot (1,01) - 500 = (1,01) \cdot x - 1005$

3ª Parcela = R\$ 500,00 → $[(1,01) \cdot x - 1005] \cdot (1,01) - 500 = 0$

$$(1,01)^2 \cdot x = 1515,05 \Leftrightarrow 1,0201 \cdot x = 1515,05 \Leftrightarrow x = \frac{1515,05}{1,0201} \cong 1485,20$$

RESPOSTA: “C” (HABILIDADES FINANCEIRAS – BNCC: EF09MA05 / EM13MAT303)

ENEM 2021

Questão 165 enem2021

Um casal decidiu aplicar em um fundo de investimentos que tem uma taxa de rendimento de 0,8% ao mês, num regime de capitalização composta.

O valor final F a ser resgatado, depois de n meses, a uma taxa de rendimento mensal x , é dado pela expressão algébrica $F = C(1 + x)^n$, em que C representa o capital inicial aplicado.

O casal planeja manter a aplicação pelo tempo necessário para que o capital inicial de R\$ 100 000,00 duplique, sem outros depósitos ou retiradas.

Fazendo uso da tabela, o casal pode determinar esse número de meses.

Y	Log Y
1,008	0,003
1,08	0,03
1,8	0,20
2	0,30
3	0,47

Para atender ao seu planejamento, o número de meses determinado pelo casal é

- A** 156.
- B** 125.
- C** 100.
- D** 10.
- E** 1,5.

$$\begin{aligned}
 200.000 &= 100.000 \cdot (1 + 0,8\%)^n \Leftrightarrow 2 = (1,008)^n \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \text{Log}(2) &= \text{Log}(1,008)^n \Leftrightarrow n \cdot \text{Log}(1,008) = \text{Log}(2) \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow n &= \frac{\text{Log}(2)}{\text{Log}(1,008)} = \frac{0,3}{0,003} = 100
 \end{aligned}$$

RESPOSTA: “C” (HABILIDADES FINANCEIRAS – BNCC: EM13MAT304 / EM13MAT305)

UERJ – Exame Único de Qualificação – 2022

Questão 24. Em uma revendedora, uma motocicleta custa à vista R\$ 10.404,00. Esse valor também pode ser pago a prazo, sem juros, em duas parcelas de R\$ 5.202,00, sendo a primeira um mês após a compra e a segunda dois meses após a compra. Um comprador tem o valor de R\$ 10.404,00 em uma aplicação que rende juros de 2% ao mês. Ele decide manter esse valor aplicado e, ao final do primeiro mês, retira apenas R\$ 5.202,00 para pagar a primeira parcela. Um mês depois retira R\$ 5.202,00 e faz o pagamento da segunda parcela. Isso equivale a ter um desconto no ato da compra. Esse desconto, em percentual, está mais próximo de:

- (A) 3,0% (B) 3,5% (C) 4,0% (D) 4,5%

$$\begin{aligned}
 J_1 &= (10.404) \cdot \frac{2}{100} = 208,08 \Rightarrow M_1 = 10.612,08 \\
 S_1 &= 10.612,08 - 5.202,00 = 5.410,08 \\
 J_2 &= (5.410,08) \cdot \frac{2}{100} \cong 108,20 \Rightarrow M_2 \cong 5.518,28 \\
 S_2 &= 5.518,28 - 5.202,00 = 316,28
 \end{aligned}$$

Dois meses antes, esse valor é equivalente a: $\frac{316,28}{(1,02)^2} = \frac{316,28}{(1,0404)} \cong 304$

$$D = \frac{304}{10.404} \cong 3\%$$

RESPOSTA: “A” (HABILIDADES FINANCEIRAS – BNCC: EF09MA05 / EM13MAT303)

Analisando estas seis questões e as suas resoluções, concluímos que há uma priorização na interpretação das situações financeiras apresentadas. Neste sentido, a “aplicação mecânica” das fórmulas não é suficiente para a resolução das questões dos exames selecionados.

Há ainda questões que ilustram algumas possíveis atividades de modelagem que poderiam ser desenvolvidas e até mesmo ampliadas em sala de aula. Em todas as questões, destaca-se, ao menos, uma das habilidades da BNCC.

O conceito de inflação, que é poucas vezes trabalhado no Ensino Médio, esteve presente em uma questão.

Nas atividades analisadas, que se alinham à BNCC, verifica-se a importância do domínio das funções exponenciais e logarítmicas.

As resoluções apresentadas corroboram o que afirma Ilydio (2012) sobre o domínio de conceitos básicos de: (1) fatores de correção e (2) valor do dinheiro no tempo para solução de uma grande variedade de questões de Matemática Financeira.

Portanto, conforme esta análise, pode-se dizer que a BNCC traz novos desafios aos alunos e aos professores de Matemática, haja vista que prioriza habilidades pouco exploradas em um contexto anterior à BNCC.

Além disto, este trabalho aponta que há algum tempo as Licenciaturas em Matemática necessitam de reforço curricular em relação ao conteúdo de Matemática Financeira.

2 OFICINA DE MATEMÁTICA FINANCEIRA

2.1 Aspectos preparatórios e metodológicos da Oficina

Desenvolveu-se uma Oficina (na modalidade remota) para a análise de factibilidade da proposta metodológica deste trabalho, sendo conduzida no IFRJ de Paracambi em 24/01/2022 em duas turmas reunidas de Licenciatura em Matemática do Professor Moisés Ceni. Este desenvolvimento de atividade remota por meio da plataforma Google Meet justificou-se em decorrência das restrições impostas pela Pandemia de Covid-19. O detalhamento completo desta Oficina encontra-se nos APÊNDICES C e D deste trabalho.

Metodologicamente, esta pesquisa, além do desenvolvimento e observação da Oficina, contou ainda com a aplicação de dois questionários, ambos gerados na plataforma Google Forms: um prévio à Oficina e outro posterior para a análise dos conhecimentos dos licenciandos sobre o assunto de Matemática Financeira, bem como para avaliar o impacto da Oficina sobre os seus conhecimentos.

Nestes questionários, buscou-se a investigar também os conceitos e as percepções dos alunos sobre o papel da Matemática Financeira Crítica no contexto educacional e a importância da Modelagem Matemática, enquanto metodologia mediadora para a aplicação de atividades de Matemática Financeira.

Assim, buscou-se, com este conjunto de atividades, observar certas inferências que possam colaborar com os objetivos desta pesquisa.

Deve-se ressaltar que, na Licenciatura em Matemática do IFRJ – *Campus* Paracambi, há uma disciplina obrigatória, denominada “Educação Matemática Financeira”, sendo apresentada em um curso com carga horária de 54 horas (40 horas teóricas e 14 horas de práticas profissionais) para o 8º período de uma graduação de 4 anos.

TÍTULO DA OFICINA no IFRJ: Modelando em Matemática Financeira: Uma Perspectiva Crítica

A oficina foi aplicada em duas aulas com 2 horas de duração cada uma e dividida em três partes da seguinte forma:

- ✓ PARTE 1: Juros Simples e Compostos / Taxas Equivalentes
- ✓ PARTE 2: Rendas Certas / Praticando com Excel
- ✓ PARTE 3: Modelando a compra de um automóvel por diferentes vias: Financiamento e Investimentos

Na parte 1, apresentaram-se os conceitos introdutórios sobre juros, a questão das trocas intertemporais e o significado dos valores presente e futuro e os fatores de conversão associados.

Ressaltou-se que os Juros Compostos são os juros aplicáveis ao nosso dia a dia, enquanto os Juros Simples representam um modelo teórico aplicável a situações restritas na vida real. Assim, buscou-se focar no significado e no desenvolvimento das fórmulas de capitalização composta.

O conceito de taxas equivalentes foi desenvolvido a partir da fórmula dos juros compostos, destacando-se as diferenças conceituais entre as taxas equivalentes e as proporcionais. Oportunamente e dentro do contexto das taxas equivalentes, introduziu-se ainda o conceito de taxas de inflação.

Em relação à parte 2, apresentaram-se questões conceituais sobre a temática de Rendas Certas, desenvolvendo-se as fórmulas de valor presente, valor futuro e das rendas ou pagamentos fixos a partir do relacionamento deste conteúdo com o da soma dos termos de uma PG, conforme uma estratégia de integração dos conteúdos matemáticos.

É importante destacar que estas fórmulas foram ainda apresentadas e manipuladas no Excel, sendo feito um tutorial de Excel para os alunos. Discutiram-se também 3 exercícios de aplicação. Na Oficina, foram observados dois alunos em uma faixa etária superior à média da turma e que nunca tiveram contato com planilhas em Excel.

Na parte 3, realizou-se a seguinte proposta de modelagem para a **Compra de um Automóvel**, o que é convergente com a promoção do pensamento autônomo e a apresentação de temas do cotidiano aos alunos:

- a) Foi feita uma divisão das turmas em dois ou três grupos para aplicação de uma atividade de modelagem para o financiamento de um automóvel popular e para a análise de investimentos financeiros com foco nesta aquisição.
- b) Os alunos buscaram informações na Internet, em bancos e em financeiras com o objetivo de trazer dados conectados com a realidade.
- c) Estudou-se sobre os investimentos bancários e buscou-se informações sobre a poupança e o CDB, entre outros investimentos, para a análise financeira.
- d) Conduziu-se um estudo sobre o financiamento de um automóvel nos bancos, comparando-o com certos tipos de investimentos bancários de R\$ 1.000,00 por mês.
- e) Analisaram-se as opções de compra de um automóvel: a) 100% financiado; b) 50% financiado; e c) comprado com todo o investimento realizado, considerando os principais aspectos qualitativos e/ou quantitativos envolvidos.

- f) Elaborou-se uma planilha para o resumo dos dados julgados necessários para a Modelagem.
- g) Os grupos tiveram o intervalo de uma semana entre as aulas e ainda contaram com 30 minutos da segunda aula para realizarem esta atividade de modelagem financeira, a fim de que pudessem apresentar os principais números e as conclusões que julgassem pertinentes.

Com esta atividade, busca-se que os alunos traduzam esta situação real para a linguagem matemática, a fim de que sustentem a suas tomadas de decisão em argumentos matemáticos, conforme uma abordagem crítica e reflexiva.

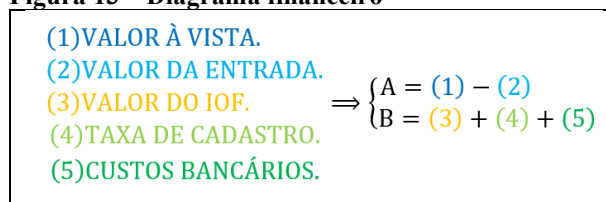
“A BNCC destaca o raciocínio, a representação, a comunicação, a argumentação como processos de aprendizagem ricos para o desenvolvimento de competências para o **Letramento Matemático**¹⁵, alvo educacional do Ensino Fundamental.” (BRASIL, 2018, p.266, grifo nosso)

A utilização de tecnologias digitais é um ponto de destaque na BNCC, haja vista as suas aplicações nas atividades de modelagem, especialmente no que se refere à validação de resultados e ao aprimoramento de resoluções. Por conta destes importantes aspectos, optou-se pela utilização de ferramentas tecnológicas durante a condução da Oficina.

Esta atividade realizada com os licenciandos focou na real aplicabilidade das ferramentas de Matemática Financeira (fórmulas, planilhas, etc.) e no estímulo à argumentação por meio da base teórica da Matemática.

Conforme o APÊNDICE C, segue um exemplo de modelo representado na Oficina (diagrama financeiro), que pode ser entendido como **Modelo Matemático** dentro do contexto e da finalidade para o qual foi elaborado, de acordo com a Figura 13 a seguir:

Figura 13 – Diagrama financeiro



FONTE: Acervo do autor (elaboração própria).

¹⁵ “Entende-se Letramento Matemático como a capacidade individual de formular, empregar e interpretar a matemática em uma variedade de contextos. Isso inclui raciocinar matematicamente e utilizar conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas para descrever, explicar e predizer fenômenos. Isso auxilia os indivíduos a reconhecer o papel que a matemática exerce no mundo e para que cidadãos construtivos, engajados e reflexivos possam fazer julgamentos bem fundamentados e tomar as decisões necessárias.” (PISA, 2012, apud BRASIL, 2018, p.266)

Assim, faz-se a ressalva de que a construção de Modelos Matemáticos é uma atividade específica para cada atividade de modelagem desenvolvida, podendo haver sempre simplificações e/ou introdução de novas variáveis.

A título de exemplificação e destacando não haver necessidade de replicação desta planilha, apresentou-se, na Oficina, a seguinte análise financeira na Figura 14:

Figura 14 – Planilha de análise financeira

ESTUDO COMPRA FINANCIADA AUTOMÓVEL									
RENAULT KWID NOVO NA COR BRANCA									
BANCO ITÁU									
PREÇO À VISTA R\$ 51990,00									
ENTRADA 10% R\$ 5199,00									
Mensais	Prestação	Reg. Contrato	IOF	Valor Financiado	Total a Pagar	J mensal	J anual	CET mensal	CET anual
36	1741,92	175,80	1455,13	48489,89	67908,12	1,45	18,86	1,68	22,12
48	1436,75	175,80	1515,77	48558,68	74163,00	1,52	19,84	1,71	22,58
60	1254,86	175,80	1551,07	48601,18	80490,60	1,55	20,77	1,72	22,65
ENTRADA 20% R\$ 10398,00									
	Prestação	Reg. Contrato	IOF	Valor Financiado	Total a Pagar	J mensal	J anual	CET mensal	CET anual
36	1538,60	175,80	1293,03	43121,20	65787,60	1,41	18,30	1,64	21,57
48	1266,99	175,80	1346,98	43182,37	71199,12	1,48	19,28	1,67	22,02
60	1104,42	175,80	1378,41	43220,21	76663,20	1,51	19,70	1,68	22,08
ENTRADA 30% R\$ 15597,00									
Mensais	Prestação	Reg. Contrato	IOF	Valor Financiado	Total a Pagar	J mensal	J anual	CET mensal	CET anual
36	1335,64	175,80	1130,96	37752,53	63680,04	1,36	17,60	1,59	20,88
48	1094,63	175,80	1177,98	37805,85	68139,24	1,42	18,44	1,61	21,17
60	954,41	175,80	1205,76	37839,26	72861,60	1,46	19,00	1,63	21,37

FONTE: Acervo do autor (elaboração própria).

Em relação à planilha anterior, focalizou-se na situação de **Entrada de 30% e financiamento em 36 meses**, a partir da qual temos:

- Entrada de 30% de R\$ 51.990,00 = **R\$ 15.597,00**
- $A = 51.990,00 - 15.597,00 = \text{R\$ } 36.393,00$
- $B = (\text{IOF} + \text{Reg. Contrato}) + \text{Extras} = 1.306,76 + \text{Extras} = \text{R\$ } 1.359,53$
- $A + B = \text{Valor total financiado} = \text{R\$ } 37.752,53$
- Taxas equivalentes: J mensal = 1,36% a.m. $\leftrightarrow$ J anual = **17,60% a.a.**
- CET (Custo Efetivo Total) mensal = 1,59% a.m. $\leftrightarrow$ CET anual = **20,88% a.a.**
- Valor total financiado = **R\$ 37.752,53 (VP)**
- Juros cobrados (i%) = **1,36% a.m. (36 meses)**

Para equivalência entre as taxas mensal e anual, a seguinte relação é importante:

$$(1 + i_m)^{12} = (1 + i_a) \Rightarrow i_m = \sqrt[12]{(1 + i_a)} - 1$$

Com esta Oficina, desenvolveram-se temáticas centrais da Matemática Financeira sob uma perspectiva investigativa, que é proporcionada pela Modelagem Matemática.

Assim, nesta Oficina, trabalharam-se os seguintes conceitos-chave da Matemática Financeira:

- I) Utilização de Fatores de Correção: para Valor Futuro $(1 + i)^n$ e para Valor Presente $(1 + i)^{-n}$ nos sistemas de capitalização composta (regra geral).
- II) Entendimento do valor do dinheiro no tempo e dos deslocamentos dos fluxos financeiros.
- III) Aplicação das equivalências de capitais com manipulação de expoentes, incluindo os fracionários e/ou negativos.
- IV) Reconhecimento de situações financeiras que abrangem séries de Capitais, bem como interpretação e aplicação correta das fórmulas delas decorrentes.

Morgado *et al.* (2015) afirmam que os livros de Matemática Financeira, de modo geral, trazem muitos conceitos e particularizações de fórmulas que poderiam ser sintetizados por um tratamento mais geral e focado nos temas essenciais da Matemática Financeira.

Ilydio Sá (2012) corrobora esse argumento, afirmando que as atividades de Matemática Financeira se fundamentam apenas em dois conceitos básicos: (1) fatores de correção e (2) valor do dinheiro no tempo. Para ele, basta um aluno dominar estes dois conceitos para estar apto a resolver os exercícios e modelagens de Matemática Financeira.

Assim, a Oficina buscou proporcionar este tipo de tratamento na sua concepção e aplicação, ou seja, ela foi desenvolvida para a exploração dos conceitos básicos da Matemática Financeira por meio de uma apresentação teórica para viabilização da parte prática da Oficina.

Neste sentido, buscou-se o desenvolvimento de competências e de habilidades financeiras e também das relacionadas à Matemática de uma maneira geral. Isto porque, com a Modelagem, os professores intencionam o desenvolvimento das capacidades interpretativa e argumentativa e da autonomia intelectual dos alunos.

A Matemática Financeira foi apresentada aos alunos, de forma integrada, com o recurso do Excel, sendo ilustradas desde fórmulas básicas até fórmulas financeiras customizadas. Ainda no contexto das tecnologias digitais, estimulou-se a busca por informações sobre economia e finanças na internet para a realização da atividade de modelagem.

A aplicação da Modelagem como metodologia para o Ensino Básico proporciona um aumento das oportunidades de mediação do ensino pelas vias tecnológicas (planilhas, calculadoras e aplicativos) e impacta tanto na melhoria do domínio sobre as ferramentas tecnológicas como no desenvolvimento de novas e mais eficientes estratégias de cálculos e modelagens a partir destas tecnologias.

Observando a dinâmica de uma atividade de Modelagem Matemática, optou-se por não trazer um resumo estruturado ou uma cartilha sobre investimentos, especialmente sobre a Poupança e o CDB, haja vista que o desenvolvimento da autonomia intelectual e do “espírito investigativo” dos alunos é um dos objetivos deste tipo de atividade. A busca de dados e informações por parte dos alunos são essenciais nesta metodologia. Todavia, na observação da atividade, constatou-se que o engajamento dos estudantes com a temática de investimentos foi baixo e, por exemplo, poucos alunos trouxeram informações sobre CDB.

Ainda que pesem os aspectos didáticos da Modelagem que ressaltam a busca de dados e de informações para uma abordagem integral da atividade, caso o professor entenda ser oportuna a apresentação de uma cartilha de investimentos para focalizar os aspectos econômico-financeiros mais relevantes para a Matemática Financeira, o docente pode apresentá-la. A título de exemplificação e de sugestão pedagógica, elaboramos uma cartilha com base no livro de Planejamento financeiro pessoal – Coleção TOP (CVM; PLANEJAR, 2019):

É importante destacar que não existe investimento sem risco, de modo que uma ou mais modalidades de risco se apresentam em um produto de investimento em maior ou menor escala. O risco está ligado à questão da rentabilidade, pois, na tentativa de se ganhar mais, o investidor deverá estar disposto a correr mais riscos.

Outro aspecto importante dos investimentos é a liquidez, isto é, a sua capacidade de transformar o capital investido em caixa ou em recursos disponíveis, a qualquer tempo, por um preço justo (preço observado no mercado).

Os imóveis são um exemplo clássico de ativos de baixa liquidez, enquanto os títulos públicos atrelados à taxa Selic (Letras Financeiras do Tesouro) são exemplos de ativos de liquidez elevada.

Essencialmente, os tipos de risco subdividem-se em: de crédito, de mercado e de liquidez.

O risco de crédito está relacionado a possíveis perdas provenientes da incapacidade financeira de o emissor de um título de dívida (tomador de recursos) honrar os seus compromissos, deixando de pagar os juros e/ou o capital em dívida. Está presente, em maior ou menor escala, em todos os títulos de crédito ou de dívida, conhecidos como títulos de renda fixa. Ao adquirir um CDB (Certificado de Depósito Bancário) ou uma Letra de Crédito Imobiliário (LCI), por exemplo, o investidor corre o risco do banco emissor.

O risco de mercado se caracteriza pela oscilação no preço ou no valor de mercado de títulos e valores mobiliários, gerando perdas ou ganhos ao investidor. As condições macroeconômicas podem alterar as taxas de juros, a

taxa de câmbio, o preço das *commodities* e, assim, influenciar, positiva ou negativamente, os preços dos ativos financeiros no mercado.

O risco de liquidez está associado à capacidade de comprar/vender um título sem afetar substancialmente o preço. O risco de liquidez surge quando o investidor não consegue concretizar uma negociação pelo preço justo ou de mercado, em razão de a operação exceder ao volume geralmente negociado naquele período.

Os instrumentos de renda fixa são os títulos representativos de emissão de dívida pública (títulos públicos federais) ou de dívida privada (empresas financeiras e não financeiras). As empresas que captam os recursos (tomadoras dos empréstimos) prometem pagar (a quem estiver disposto a financiá-las) determinado fluxo de caixa futuro e rendimento previamente acordado. Os doadores dos recursos (investidores) tornam-se credores do emissor, sujeitos ao risco de crédito do emissor. No vencimento, o título é resgatado e o capital retorna ao investidor, acrescido dos juros contratados.

Diferentemente da renda fixa, o mercado de renda variável compreende todas as operações realizadas nas bolsas de valores, de mercadorias, de futuros e em operações com ouro, as quais devem ter, obrigatoriamente, a interveniência das instituições integrantes do Sistema Financeiro Nacional (bancos, corretoras e distribuidoras). Os ativos ou contratos de renda variável podem ser negociados por meio de quatro modalidades: mercado à vista, de opções, futuro e a termo. São negociados no mercado à vista as ações emitidas por companhias abertas e o ouro. Nos demais mercados (a termo, opções e futuro), podem ser negociados, além das ações, contratos tendo por objeto outros ativos, como índices de ações, taxa de juros, dólar, café, etc.

Poupança é o investimento mais simples e popular do Brasil. Os seus recursos financiam, prioritariamente, o setor da habitação. Apresenta as seguintes características: a) Remuneração – é definida no Banco Central, sendo igual para todas as Instituições Financeiras; b) Periodicidade dos rendimentos – os rendimentos são creditados mensal ou trimestralmente, se o titular for pessoa física. No caso de pessoa jurídica, apenas trimestralmente; c) Prazo do Investimento – é indeterminado; d) Liquidez – tem liquidez diária, entretanto, os valores sacados antes da data de aniversário não recebem o rendimento do último período; e) Rentabilidade – O rendimento da poupança será composto por TR (Taxa Referencial) mais os juros de: 0,5% ao mês, se a meta da taxa Selic, definida pelo Banco Central do Brasil, for superior a 8,5% ao ano; ou 70% da meta da taxa Selic, definida pelo Banco Central do Brasil, vigente na data de início de cada período de rendimento, nos demais casos; e f) Tributação – há isenção total do IR (Imposto de Renda) na fonte e na declaração para pessoa física e pessoa jurídica com imunidade tributária. As demais pessoas

jurídicas pagam IR de 22,5%, considerando período de rendimento de 90 dias. Não incide IOF (Imposto sobre Operações Financeiras).

Certificado de Depósito Bancário (CDB) é um título representativo de um empréstimo que o investidor faz para uma instituição bancária, por prazo determinado. Em troca, recebe uma taxa de juros, pré ou pós-fixada, definida no momento da compra. A instituição financeira pode conceder liquidez diária, antes do vencimento, ou ainda estabelecer carência para resgate antecipado. Possui os seguintes destaques: a) Característica – título referente a depósitos a prazo, sendo nominativo, negociável e transferível e, quando negociado antes do vencimento, tem o seu valor de mercado apurado em razão da taxa atual de mercado a partir da qual se realiza o desconto bancário; b) Remuneração – o CDB pré-fixado estabelece, *a priori*, a taxa nominal de remuneração pelo período do investimento, devida no vencimento; O CDB pós-fixado é corrigido pelo índice de correção desse depósito, podendo ser a variação do CDI (Certificado de Depósito Interbancário), da Selic, da TR etc.; c) Risco – o investidor corre o risco de crédito do banco emissor do CDB, contando com a garantia do FGC¹⁶, observado o limite de proteção; e d) Tributação – segue a regra geral dos investimentos em renda fixa, observando a tabela regressiva, conforme o prazo de permanência da aplicação. Os títulos de renda fixa (públicos e privados) são classificados como rendimentos sujeitos à tributação exclusiva/definitiva para fins de IR. O IOF, geralmente, incide sobre aplicações de renda fixa.

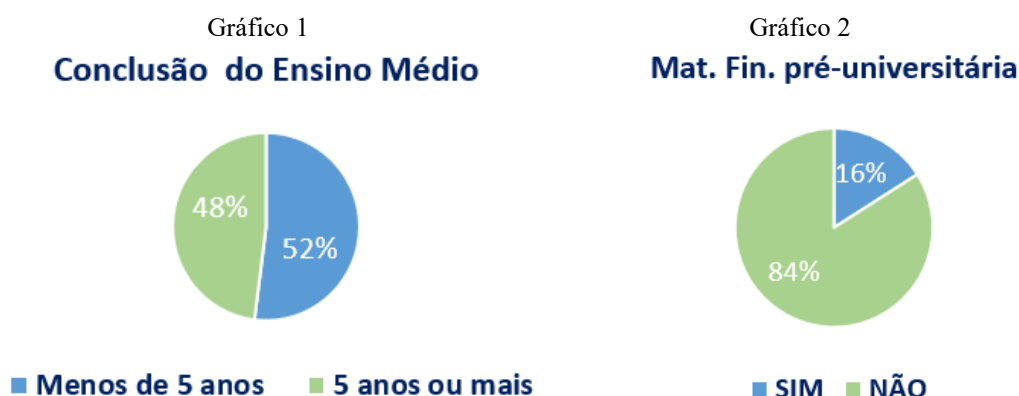
¹⁶ O Fundo Garantidor de Créditos (FGC) é uma associação civil sem fins lucrativos e tem por objetivo prestar garantia de créditos contra instituições dele participantes nas hipóteses de: decretação da intervenção, liquidação extrajudicial ou falência da associada; ou reconhecimento pelo Banco Central do estado de insolvência da associada.

2.2 Análise dos resultados da Oficina

Será realizada uma análise dos questionários respondidos pelos alunos antes e depois da Oficina de Matemática Financeira no IFRJ. O questionário inicial foi respondido por 19 alunos e o final por 9. As perguntas dos questionários estão especificadas no APÊNDICE D.

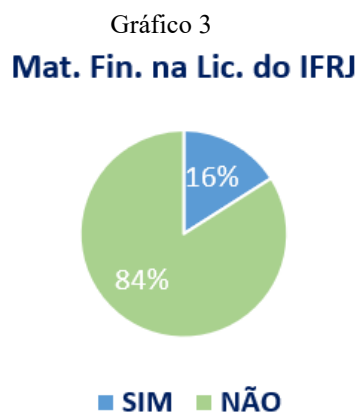
Em relação aos 19 alunos respondentes, cerca de 52% concluíram o Ensino Médio há menos de 5 anos e, aproximadamente, 84% não tiveram Matemática Financeira na sua formação pré-universitária. Aos que responderam sim e relataram sobre este aprendizado, informaram ter sido básico e focado em porcentagem e nas fórmulas de juros simples e compostos.

Estes dados podem ser resumidos nos Gráficos 1 e 2 a seguir:



FONTE: Elaboração própria.

Ainda sobre este grupo de alunos, cerca de 16% responderam ter cursado Matemática Financeira na Licenciatura em Matemática do IFRJ, sendo que 55% deles têm entre dois e três anos de Licenciatura e 40% têm entre três e quatro anos. O Gráfico 3, a seguir, ilustra os alunos que estudaram esta disciplina no IFRJ:

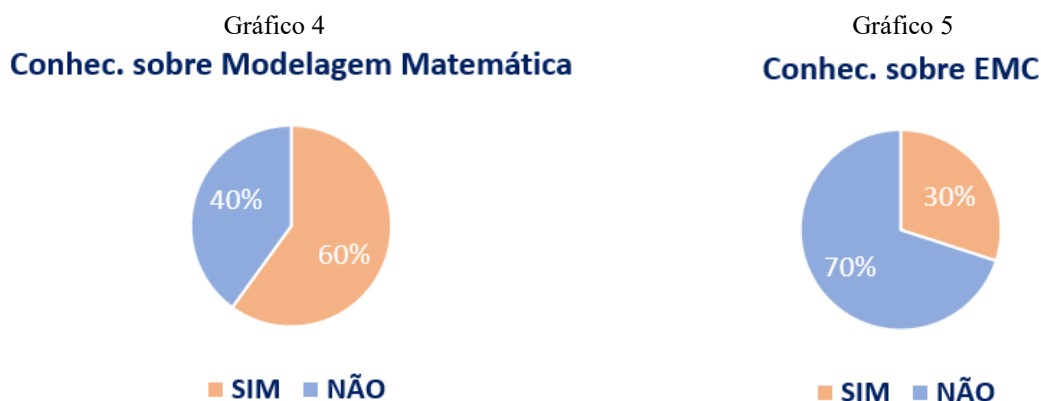


FONTE: Elaboração própria.

Dentre os três alunos que cursaram Matemática Financeira, apenas um afirmou ter aprendido esta disciplina com elementos de Modelagem ou com abordagem crítica. Somente

dois alunos relataram ter ministrado aulas nos seus estágios ou em pré-vestibulares comunitários sobre este tema.

No que se refere à Modelagem Matemática, cerca de 60% dos alunos informaram conhecê-la, enquanto Metodologia para o Ensino Básico e ainda sobre os conceitos da Educação Matemática Crítica (EMC), cerca de 30% dos alunos responderam conhecê-los. Este cenário é ilustrado pelos Gráficos 4 e 5 a seguir:



FONTE: Elaboração própria.

Em relação aos 9 alunos respondentes do questionário final (após a Oficina): cerca de 67% (6 alunos) consideraram a Matemática Básica (razões, proporções e porcentagem) como tópico de escala 5 e cerca de 33% (3 alunos) como de escala 4, considerando 1 (nenhuma importância) até 5 (maior importância). E sobre as Progressões (aritmética e geométrica), os alunos realizaram a avaliação com as mesmas pontuações do tópico de Matemática Básica.

No assunto de Funções, cerca de 78% (7 alunos) consideraram este tópico como de escala 5 e cerca de 22% (2 alunos) como de escala 3. Para Logaritmos, cerca de 22% (2 alunos) atribuíram escala 5, cerca de 33% (3 alunos) escala 4 e o restante (4 alunos) escala 3. Já para a Estatística, a escala 5 foi atribuída por cerca de 89% dos respondentes (8 alunos) e a escala 3 por apenas um.

De forma geral, os alunos perceberam que a Matemática Financeira possui importantes conexões com os assuntos da Matemática apontados na pesquisa, podendo ser trabalhada com eles ou a partir deles, dependendo da abordagem que o professor queira fazer.

Por exemplo, a Matemática Financeira pode ser desenvolvida, paralelamente, em uma aula de funções exponenciais; ou ainda, pode ser trabalhada como tema central com outros assuntos apenas servindo de suporte instrumental, como, às vezes, ocorre com o tratamento do assunto de logaritmos quando utilizado como ferramental para a Matemática Financeira.

As progressões podem ser usadas ainda para a consolidação do entendimento dos alunos sobre o comportamento dos juros, que podem ser caracterizados como progressões que se desenvolvem na linha do tempo.

Em relação aos assuntos não matemáticos trabalhados na Oficina, destacou-se a importância dos conhecimentos bancários, que são úteis ao cotidiano dos alunos. Destacou-se ainda a importância da reflexão, em sala de aula, sobre questões comportamentais a respeito do consumo.

Ressaltou-se que esta abordagem, além de melhor explorar e aprofundar situações do cotidiano dos alunos, impactou em uma melhoria de fundamentação das fórmulas financeiras em relação ao que se observa nos livros de um modo geral.

Um outro aspecto positivo destacado foi a união, em sala de aula, da teoria com a prática por meio da Oficina. Mencionou-se também a importância do domínio do Excel dentro e fora do contexto escolar.

Em relação a este questionário final, considerando, em uma escala crescente, de 1 (nenhuma importância) até 5 (maior importância) sobre o conhecimento em Matemática Financeira antes da oficina: cerca de 12% (1 aluno) o considerou na escala 4 e cerca de 44% (4 alunos) na escala 3 e os outros 44% na escala 2. Contudo, após a Oficina, cerca de 89% (8 alunos) o considerou na escala 4 e os outros 11% (1 aluno) na escala 3.

Dentre os alunos que conheciam a Modelagem Matemática ou a Educação Matemática Crítica, todos reconheceram, na Oficina, a existência de elementos pedagógicos destas práticas escolares.

Ainda com os resultados obtidos da Oficina e com os questionários analisados, é possível entender a necessidade de uma intensificação na formação de competências financeiras para os professores de Matemática, a fim de que consigam cumprir, adequadamente, o que preconiza a BNCC para a Matemática Financeira e Educação Financeira.

A Oficina foi conduzida pelas seguintes Etapas Básicas de uma atividade de Modelagem Matemática: a) Elaboração da Situação-Problema; b) Inteiração/Simplificação; c) Resolução; e d) Interpretação/Validação. Conduziu-se ainda de forma consistente com a definição de Barbosa (2001), que aborda o convite às atitudes de indagação e de investigação por parte dos alunos.

Dentro das suas limitações, a Oficina buscou entregar um produto final no sentido de contribuir, de forma ativa, para o exercício da “Cidadania Financeira” dos seus participantes, futuros professores de Matemática, provendo-os de suporte matemático, crítico e reflexivo por meio da apropriação autônoma de conceitos de diversas naturezas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A visão da Matemática Financeira e da Educação Financeira sob a perspectiva da BNCC requer um esforço adicional dos atuais professores e licenciandos em Matemática. Neste sentido, é importante que os atuais e futuros professores desenvolvam conhecimentos e competências financeiras sobre assuntos matemáticos e extramatemáticos. Este trabalho e a pesquisa do professor Ilydio (SÁ, 2012) corroboram esta colocação.

Neste sentido, além das competências financeiras para a Matemática Financeira e Educação Financeira, é necessário que haja um aprofundamento dos docentes sobre Modelagem Matemática e Educação Matemática Crítica, pois estas são importantes ferramentas para a mediação de temas financeiros na sala de aula. No questionário, os alunos afirmam ser limitado o seu conhecimento prévio sobre estas ferramentas.

Assim, defende-se, neste trabalho, que a condução de temas financeiros, em sala de aula, contemple, sempre que possível, uma perspectiva de análise crítica e reflexiva, verificando a contextualização e a conexão das atividades propostas com o cotidiano dos alunos. A Oficina aplicada procurou contribuir neste sentido.

Isto tem um duplo objetivo: melhorar o aprendizado dos alunos em termos de processo e fazer com que percebam uma “finalidade no presente” para os conteúdos explorados em sala de aula.

Esta abordagem também impacta positivamente na melhoria da capacidade interpretativa dos alunos relacionada à temática, o que integra o conteúdo, inclusive, a outras disciplinas.

O conjunto de exposições teóricas, práticas e tecnológicas desenvolvidas, sob diversos contextos neste trabalho, pretenderam, dentro do possível, contribuir para as discussões acerca das habilidades e competências financeiras dos alunos da Escola Básica, tanto na dimensão crítica como na dimensão propedêutica da Matemática Financeira, com foco especial na utilização adequada dos Fatores de Correção, reflexão sobre o valor do dinheiro no tempo, análise dos fluxos financeiros e reconhecimento de situações financeiras relacionadas a séries uniformes de capital e a diferentes modalidades de financiamentos.

Assim, almeja-se o aprimoramento da capacidade analítico-crítica dos alunos do Ensino Básico para que tenham condições de analisar modelagens mais estruturadas dentro do contexto escolar.

Neste trabalho, há uma concordância com o que argumenta Sá (2012) sobre a Matemática Financeira ter dois conceitos essenciais: fatores de correção e valor do dinheiro no

tempo. Neste sentido, pode-se dizer que, sem o uso de fórmulas e com apenas esses dois conceitos, pode-se resolver uma ampla gama de exercícios de Matemática Financeira.

Este trabalho propõe ainda que as Licenciaturas em Matemática do Brasil enviem esforços para que se reforcem os componentes curriculares de Matemática Financeira, Modelagem Matemática e Educação Matemática Crítica, a fim de se atenderem aos objetivos da BNCC nesta temática, que são convergentes aos de uma educação crítica e reflexiva e são também desafiadores para o atual quadro docente do Ensino Básico no Brasil.

Um outro ponto de destaque é que se intensifiquem os esforços nacionais para a produção de materiais didáticos e trilhas formativas em Matemática Financeira com foco na atuação do professor de Matemática, haja vista as exigências da BNCC e a carência destes materiais e trilhas. O projeto do Livro Aberto para a Educação Financeira, desenhado para a atuação docente no Ensino Médio, é uma importante iniciativa de produção material didático gratuito.

Assim, para que a Matemática Financeira da Escola Básica seja mais eficiente para a formação de alunos críticos, que não sejam mais “reprodutores” de conceitos não entendidos em sua essência e de “fórmulas decoradas”, é fundamental a formação crítica na ponta, ou seja, a formação de professores de Matemática críticos para o fortalecimento da “cadeia formativa” em Matemática Financeira sob as perspectivas da Educação Matemática Crítica e da Modelagem Matemática.

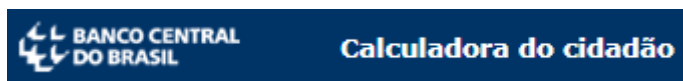
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

- [1] Acervo de Exames Nacionais do Ensino Médio – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais (INEP) – **Provas do ENEM de 2017, 2018 e 2021**. Disponível em: <<https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem>> Acesso em: 21/09/2022.
- [2] Acervo de Provas do Vestibular da UERJ – **Vestibulares de 2016 e 2022**. Disponível em: <<https://www.vestibular.uerj.br/>> Acesso em: 21/09/2022.
- [3] Acervo Estatístico da Fundação Universitária para o Vestibular (FUVEST) – **Prova da FUVEST 2018 – 1ª Fase**. Disponível em: <<https://acervo.fuvest.br/fuvest/2018>> Acesso em: 21/09/2022.
- [4] ALMEIDA, L. W.; SILVA, K. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na Educação Básica**. São Paulo: Contexto, 2012.
- [5] ANDRADE, M.M. **Introdução à Metodologia do Trabalho Científico**. 10ª ed. São Paulo: Atlas, 2019.
- [6] BARBOSA, J.C. **Modelagem matemática: O que é? Por quê? Como?** Veritati, n.4, p.73-80, 2004. Disponível em: <http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/2010/Matematica/artigo_veritati_jonei.pdf> Acesso em: 01/02/2022.
- [7] _____. **Modelagem na Educação Matemática: Contribuições para o Debate Teórico**. Anais da 24ª Reunião Anual da ANPED - 2001 (pp. 1-30). Caxambu/MG: Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação. Disponível em: <http://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/funcoes_modelagem/modulo_I/modelagem_barbosa.pdf> Acesso em: 10/03/2022.
- [8] BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular – BNCC**. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: <<http://basenacionalcomum.mec.gov.br>>. Acesso em: 10/02/2022.
- [9] _____. **Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN+ (Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais)** do Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, 2002. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>>. Acesso em: 11/04/2022.
- [10] BASSANEZI, R. C. **Ensino – aprendizagem com modelagem matemática**. São Paulo: Contexto, 2002.
- [11] BIEMBENGUT, M.S; HEIN, N. **Modelagem Matemática no Ensino**. 4ª ed. São Paulo: Contexto, 2005.
- [12] CVM – PLANEJAR. **Planejamento financeiro pessoal – Coleção TOP**. 1ª ed. Rio de Janeiro: Comissão de Valores Mobiliários (CVM) – Coordenação de Educação Financeira (COE); Associação Brasileira de Planejadores Financeiros (PLANEJAR), 2019.

- [13] D'AMBROSIO, U. **Educação Matemática: Da teoria à prática**. 23ª ed. Campinas, SP: Papirus (Coleção Perspectivas em Educação Matemática – SBEM), 2012.
- [14] GUIDORIZZI, H.L. **Um Curso de Cálculo**: volume 1. 6ª ed. Rio de Janeiro: Editora LTC, 2019.
- [15] IEZZI, G.; HAZZAN, S.; DEGENSZAJN, D. **Fundamentos de Matemática Elementar - Volume 11**: matemática comercial, matemática financeira, estatística descritiva. 9ª ed. São Paulo: Editora Atual, 2013.
- [16] IMPA: Instituto de Matemática Pura e Aplicada. **LIVRO ABERTO DE MATEMÁTICA. Educação Financeira: Ensino Médio**. Rio de Janeiro, 2020. Disponível em: <<https://umlivroaberto.org/producao/educacao-financeira>>. Acesso em: 12/02/2022.
- [17] _____. **Programa de Aperfeiçoamento de Professores de Matemática do Ensino Médio – PAPMEM** - edição de janeiro de 2020: aula do professor Luciano Castro. Matemática Financeira – II. Disponível em: <https://impa.br/wp-content/uploads/2020/01/PAPMEM_JAN_2020_Matematica_Financeira.pdf>. Acesso em: 10/03/2022.
- [18] JANOS, M. **Matemática para pais (e) interessados**: volume 1: fundamentos a álgebra. São Paulo. Editora Livraria da Física, 2011.
- [19] KLÜBER, T.E.; BURAK, D. **Concepções de modelagem matemática: contribuições teóricas**. Educação Matemática Pesquisa (PUC SP). São Paulo, v. 10, n. 1, p. 17-34, 2008. Disponível em: <<https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/1642>>. Acesso em: 10/02/2022.
- [20] LAKATOS, E. M.; MARCONI, M. **Metodologia Científica**. 7ª ed. São Paulo: Atlas, 2019.
- [21] LAPPONI, J. C. **Matemática Financeira**. Rio de Janeiro: Editora Elsevier, 2005.
- [22] LIMA, E. L. **Logaritmos**. 1ª ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática – SBM (Coleção do Professor de Matemática), 2019.
- [23] _____. **Matemática e Ensino**. 3ª ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática – SBM (Coleção do Professor de Matemática), 2007.
- [24] MACHADO, Nilson José. **Matemática por Assunto 9**: noções de cálculo. São Paulo: Editora Scipione, 1988.
- [25] MATHIAS, Washington Franco; GOMES, José Maria. **Matemática Financeira: Problemas, exercícios, etc.** 4ª ed. São Paulo. Editora Atlas, 2004.
- [26] MORGADO, A.C.; WAGNER, E.; ZANI, S.C. **Progressões e Matemática Financeira**. 6ª ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática – SBM (Coleção do Professor de Matemática), 2015.

- [27] OCDE: International Network on Financial Education (INFE). **Financial Education and the Crisis: Policy Paper and Guidance**. Junho de 2009. Disponível em: <<https://www.oecd.org/finance/financial-education/50264221.pdf>>. Acesso em: 25/02/2022.
- [28] PESSOA, C.A.S.; MUNIZ, I. Jr.; KISTEMANN JR., M. A. **Cenários sobre Educação Financeira Escolar: entrelaçamentos entre a pesquisa, o currículo e a sala de aula de Matemática**. Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana (EDUMATEC). v.9, n.1, 2018. Disponível em: <<https://periodicos.ufpe.br/revistas/emteia/article/view/236528>> Acesso em: 10/02/2022
- [29] SÁ, Ilydio Pereira de. **A educação matemática crítica e a matemática financeira na formação de professores**. 2012. Tese. (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2012. Disponível em: <<https://repositorio.pgskroton.com/handle/123456789/3566>> Acesso em: 11/02/2022
- [30] _____. **Curso Básico de Matemática Comercial e Financeira**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2008.
- [31] _____. **Matemática Financeira para Educadores Críticos**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2011.
- [32] SKOVSMOSE, Ole. **Um Convite à Educação Matemática Crítica** (tradução: Orlando de Andrade Figueiredo). 1ª ed. Campinas, SP: Papirus (Coleção Perspectivas em Educação Matemática – SBEM), 2014.
- [33] SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez. **Matemática: Ensino Médio**. Vol. 3. 9ª ed. São Paulo. Editora Saraiva, 2013.
- [34] TORRES, G.Z. **Noções de Matemática Financeira – Calcular prestações de uma dívida, como?** Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro, RPM nº 66, p. 9-12, 2008. Disponível em: <<https://rpm.org.br/cdrpm/66/3.html>> Acesso em: 13/02/2022.
- [35] TROTTA, Fernando. **Matemática por Assunto 2: progressão aritmética, progressão geométrica e logaritmos**. São Paulo: Editora Scipione, 1988.
- [36] VAN DE WALLE, J.A. **Matemática no Ensino Fundamental: formação de professores em sala de aula** (tradução: Paulo Henrique Colonese). 6ª ed. Porto Alegre. Editora Artmed, 2009.
- [37] XU, L.; ZIA, B. **Financial Literacy around the World. An overview of the evidence with practical suggestions for the way forward**. The World Bank, Development Research Group, Finance and Private Sector Development Team. 2012.

APÊNDICE A – Banco Central do Brasil – Calculadora do Cidadão



A Calculadora do cidadão permite a realização de simulações para cálculos com:

(1) Depósitos Regulares (aplicação)

Aplicação com depósitos regulares
Simule a aplicação com depósitos regulares

Número de meses

Taxa de juros mensal %

Valor do depósito regular
 (depósito realizado no início do mês)

Valor obtido ao final

Metodologia

Metodologia da Aplicação com Depósitos Regulares

$$S_n = (1 + j) \frac{(1 + j)^n - 1}{j} p$$

Onde:

n = Nº de Meses

j = Taxa de Juros Mensal

p = Valor do Depósito Regular

S_n = Valor Obtido ao Final

Obs. 1: S_n corresponde à soma de uma progressão geométrica formada por n pagamentos iguais a p , realizados no início de cada período e corrigidos até o final dos n períodos.

Obs. 2: O cálculo da taxa de juros (j) é feito por aproximação do Valor Obtido ao Final (S_n) com margem de erro sobre S_n inferior a 0.000001.

Cálculo	Exemplos de problemas	Aplicação Digital
Nº de Meses	Um cidadão planeja comprar um bem no valor de R\$ 364,50. Para isto irá depositar mensalmente R\$ 50,00 em aplicação financeira que está rendendo 1% ao mês. Em quanto tempo terá dinheiro suficiente para comprar o bem? $364,50 = (1,01) \times \frac{(1,01)^n - 1}{0,01} \times 50$ $\therefore n = 7$	
Taxa de Juros Mensal	Nos últimos 9 meses, um cidadão depositou mensalmente a quantia R\$ 100,00 em caderneta de poupança. Ao final deste período, observou que o saldo da poupança está em R\$ 946,30. Qual foi o rendimento médio da poupança nesse período? $946,30 = (1 + j) \times \frac{(1 + j)^9 - 1}{j} \times 100$ $\therefore j = 1,00166\%$	
Valor do Depósito Regular	Um cidadão adquiriu um bem no valor de R\$ 8.500,00, a ser pago após 6 meses. Quanto terá que depositar mensalmente, considerando que obterá rendimento de 0,85% ao mês?	

	$8.500 = (1,0085) \times \frac{(1,0085)^6 - 1}{0,0085} \times p$ $\therefore p = \text{R\$ } 1.375,17$	Simule a aplicação com depósitos regulares Número de meses 6 Taxa de juros mensal 0,850000 % Valor do depósito regular (depósito realizado no início do mês) 1.375,17 Valor obtido ao final 8.500,00
Valor Obtido ao final	Durante 8 meses, um cidadão deposita mensalmente a quantia de R\$ 150,00. Quanto terá ao final da aplicação, sabendo que o rendimento médio dessa aplicação é de 1,2% ao mês? $S_n = (1,012) \times \frac{(1,012)^8 - 1}{0,012} \times 150$ $\therefore S_n = \text{R\$ } 1.266,65$	Simule a aplicação com depósitos regulares Número de meses 8 Taxa de juros mensal 1,200000 % Valor do depósito regular (depósito realizado no início do mês) 150,00 Valor obtido ao final 1.266,65

(2) Prestações fixas (financiamento)

Financiamento com prestações fixas

Simule o financiamento com prestações fixas

Nº. de meses

Taxa de juros mensal %

Valor da prestação
(Considera-se que a 1ª. prestação não seja no ato)

Valor financiado
(O valor financiado não inclui o valor da entrada)

[Metodologia](#)

Metodologia do Financiamento com Prestações Fixas

Cálculo com juros compostos e capitalização mensal.

$$q_0 = \frac{1 - (1 + j)^{-n}}{j} p$$

Onde:

n = Nº de Meses

j = Taxa de Juros Mensal

p = Valor da Prestação

q_0 = Valor Financiado

Obs.: O cálculo da taxa de juros (j) é feito por aproximação do Valor da Prestação (p) com margem de erro sobre p inferior a 0.000001.

Cálculo	Exemplos de problemas	Aplicação Digital
Nº de Meses	Um cidadão está devendo R\$ 2.000,00, tendo ficado acertado que o tomador irá pagar juros de 1% ao mês. Sabendo que as parcelas serão de R\$ 261,50, em quanto tempo o empréstimo será quitado? $2000 = \frac{1 - (1,01)^{-n}}{0,01} \times 261,50$ $\therefore n = 8$	Simule o financiamento com prestações fixas Nº. de meses 8 Taxa de juros mensal 1,000000 % Valor da prestação 261,50 (Considera-se que a 1ª. prestação não seja no ato) Valor financiado 2.000,00 (O valor financiado não inclui o valor da entrada)
Taxa de Juros Mensal	Um cidadão está pensando em comprar um bem que custa à vista R\$ 750,00. O vendedor oferece a opção de pagar em 10 parcelas fixas de R\$ 86,00, sem entrada. Qual a taxa de juros embutida no financiamento? $750 = \frac{1 - (1 + j)^{-10}}{j} \times 86$ $\therefore j = 2,56901\%$	Simule o financiamento com prestações fixas Nº. de meses 10 Taxa de juros mensal 2,569010 % Valor da prestação 86,00 (Considera-se que a 1ª. prestação não seja no ato) Valor financiado 750,00 (O valor financiado não inclui o valor da entrada)

Valor da Prestação	A um cidadão é oferecido um bem no valor de R\$ 1.290,00. Para esse pacote, existe a opção de pagar em 4 prestações mensais fixas sem entrada, com taxa de juros de 1,99% ao mês. Qual o valor da prestação? $1.290 = \frac{1 - (1,0199)^{-4}}{0,0199} \times p$ $\therefore p = \text{R\$ } 338,70$	Simule o financiamento com prestações fixas Nº. de meses Taxa de juros mensal 1,990000 % Valor da prestação 338,70 (Considere-se que a 1a. prestação não seja no ato) Valor financiado 1.290,00 (O valor financiado não inclui o valor da entrada)
Valor Financiado	Um bem está sendo vendido em 24 parcelas fixas R\$ 935,00. Sabendo que a taxa de juros anunciada é de 1,99% ao mês, qual o valor do bem? $q_0 = \frac{1 - (1,0199)^{-24}}{0,0199} \times 935$ $\therefore q_0 = \text{R\$ } 17.704,56$	Simule o financiamento com prestações fixas Nº. de meses 24 Taxa de juros mensal 1,990000 % Valor da prestação 935,00 (Considere-se que a 1a. prestação não seja no ato) Valor financiado 17.704,56 (O valor financiado não inclui o valor da entrada)

(3) Valor futuro

Valor futuro de um capital

Simule o valor futuro de um capital

Número de meses

Taxa de juros mensal %

Capital atual
(depósito realizado no início do mês)

Valor obtido ao final

Metodologia

Metodologia do Valor Futuro de um Capital

$$S_n = (1 + j)^n q_0$$

Onde:

 n = Nº de Meses j = Taxa de Juros Mensal q_0 = Capital Atual S_n = Valor Obtido ao Final

Cálculo	Exemplos de problemas	Aplicação Digital
Nº de Meses	Um cidadão está planejando comprar um bem no valor de R\$ 449,70. Para isso deposita a quantia de R\$ 350,00 em caderneta de poupança. Sabendo que o rendimento médio é de 1,05% ao mês, em quanto tempo terá dinheiro suficiente para comprar o bem? $449,70 = (1,0105)^n \times 350 \therefore n = 24$	Simule o valor futuro de um capital Número de meses 24 Taxa de juros mensal 1,050000 % Capital atual 350,00 (depósito realizado no início do mês) Valor obtido ao final 449,70
Taxa de Juros Mensal	Um cidadão emprestou a quantia de R\$ 800,00, ficando acertado que o tomador pagará no prazo de 6 meses a quantia de R\$ 950,00. Quanto estará pagando de juros? $950 = (1 + i)^6 \times 800 \therefore i = 2,905583\%$	Simule o valor futuro de um capital Número de meses 6 Taxa de juros mensal 2,905583 % Capital atual 800,00 (depósito realizado no início do mês) Valor obtido ao final 950,00

Capital Atual	Um cidadão pretende adquirir um bem daqui a 7 meses no valor de R\$ 2.500,00. Quanto terá que depositar hoje, sabendo que o rendimento de determinada aplicação é de 1,5% ao mês? $2.500 = (1,015)^7 \times q_0 \quad \therefore q_0 = \text{R\$ } 2.252,57$	Simule o valor futuro de um capital Número de meses 7 Taxa de juros mensal 1,500000 % Capital atual (depósito realizado no início do mês) 2.252,57 Valor obtido ao final 2.500,00
Valor Obtido ao final	Um cidadão recebe um abono salarial no valor de R\$ 500,00 e resolveu depositá-lo em caderneta de poupança. Quanto obterá no prazo de 11 meses, sabendo que o rendimento médio da poupança é de 0,88% ao mês? $S_n = (1,0088)^{11} \times 500 \quad \therefore S_n = \text{R\$ } 550,59$	Simule o valor futuro de um capital Número de meses 11 Taxa de juros mensal 0,880000 % Capital atual (depósito realizado no início do mês) 500,00 Valor obtido ao final 550,59

APÊNDICE B – Noções de Logaritmos e Progressões

LOGARITMOS

Conforme LIMA (2007), os logaritmos foram desenvolvidos, no século 17, como ferramenta de cálculo aritmético para possibilitar manipulações através de suas propriedades operatórias, realizando, assim, transformações que pudessem facilitar os cálculos, como as de: produtos em somas, quocientes em diferenças, potências em produtos, etc.

Assim, após a generalização do uso dos logaritmos, estes tiveram um relevante papel na instrumentalização dos cálculos aritméticos. Contudo, as funções logarítmicas (e as suas inversas, as exponenciais) possuem propriedades utilizadas para a qualificação de modelos específicos de variação de grandezas, como os que expressam variações logarítmicas (e as exponenciais).

Em termos gerais, logaritmo de um número é um expoente a que se deve elevar um outro número positivo (e diferente de 1) para se obter certo resultado.

LIMA (2019) enfatiza o entendimento do logaritmo como expoente de uma potência e, assim, recomenda explorar a definição e as propriedades de potência para que, em uma etapa posterior, o professor apresente o tema de logaritmos aos alunos.

Defende ainda que é importante trabalhar não apenas os expoentes naturais das potências, mas também os inteiros, os racionais e reais.

Sendo n um número natural e a um número real positivo, define-se (por recorrência) a potência a^n do seguinte modo:

$$a^n = 1, \text{ se } n = 0$$

$$a^n = a^{n-1} \cdot a, \text{ se } n \geq 1$$

Por Indução Matemática, pode-se provar para m e n números naturais que a propriedade a seguir tem validade:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Demonstrada esta propriedade, também podemos garantir o seguinte resultado:

$$a^n \cdot a^{-n} = a^{n+(-n)} = a^0 = 1 \Rightarrow a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Ainda com esta propriedade, garante-se seguinte:

$$\underbrace{a^n \cdot a^n \dots a^n}_{\text{"p" fatores}} = a^{\overbrace{n+n+\dots+n}^{\text{"p" parcelas}}} = a^{n \cdot p}$$

Note ainda que:

$$\underbrace{a^n \cdot a^n \dots a^n}_{\text{"p" fatores}} = (a^n)^p = a^{n \cdot p}$$

No caso dos números racionais da forma $r = \frac{p}{q}$ com $q \neq 0$ e p e q inteiros, deve-se garantir:

$$a^r \cdot a^q = a^p$$

$$a^r = a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$

Sendo r e s números racionais, podemos mostrar também que:

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$$

Como será detalhado, sendo k um número real, $a^k = y \Leftrightarrow \log_a(y) = k$

Convém mencionar também que, para melhor entendermos as definições de logaritmo e de função logarítmica, primeiramente, devemos compreender a definição de função exponencial.

Sabemos que uma função exponencial denotada por $f(x) = a^x$ define os valores de a^x com $a > 0$ e $a \neq 1$ para o domínio dos números reais. Logo, apresenta como imagem os números reais positivos e, dentre as suas propriedades, ressaltamos a seguinte:

$$f(p + q) = f(p) \cdot f(q)$$

Destaca-se ainda que quando $a > 1$, a função exponencial $f(x)$ é crescente e, quando $0 < a < 1$, $f(x)$ é decrescente.

Logaritmo – DEFINIÇÃO: Seja uma base a com $a > 0$ e $a \neq 1$ e $y > 0$, o $\log_a(y)$ é o expoente ao qual se deve elevar a base a para se obter o resultado y , ou seja:

$$\log_a(y) = x \Leftrightarrow y = a^x$$

Se $y = a^x$, então x é o log de y na base a , ou seja, $x = \log_a(y)$

Exemplos:

a) Se $8 = 2^3$, então 3 é o log de 8 na base 2, ou seja, $3 = \log_2(8)$

b) Se $81 = 3^4$, então 4 é o log de 81 na base 3, ou seja, $4 = \log_3(81)$

Consequências imediatas da definição de logaritmo:

- a) $\log_a(1) = 0$
- b) $\log_a(a) = 1$
- c) $y_1 = y_2 \Rightarrow \log_a(y_1) = \log_a(y_2)$
- d) $a^{\log_a(y)} = y$
- e) $\log_a(a^k) = k$

Propriedades dos Logaritmos:

$$1) \log_a(m.n) = \log_a(m) + \log_a(n)$$

Prova

$$\left. \begin{array}{l} \log_a(m) = u \Leftrightarrow m = a^u \\ \log_a(n) = v \Leftrightarrow n = a^v \end{array} \right\} \Rightarrow m.n = a^u . a^v = a^{u+v}$$

$$m.n = a^{u+v} \Leftrightarrow \log_a(m.n) = u + v = \log_a(m) + \log_a(n)$$

$$2) \log_a\left(\frac{m}{n}\right) = \log_a(m) - \log_a(n)$$

Prova – Considerando as seguintes definições:

$$\log_a(1) = 0 \Leftrightarrow 1 = a^0$$

$$-\log_a(y) = x \Leftrightarrow y = a^{-x}$$

$$\log_a\left(\frac{m}{n}\right) = \underbrace{\log_a(m.n^{-1}) = \log_a(m) + \log_a(n^{-1})}_{\text{PROPRIÉDADE 1}} = \log_a(m) - \log_a(n)$$

$$3) \log_a(m)^k = k . \log_a(m)$$

Prova – Considerando as provas das PROPRIÉDADES 1 e 2:

$$\log_a(m)^k = \log_a\left(\underbrace{m.m \dots m}_{k \text{ fatores } m}\right) = \underbrace{\log_a(m) + \log_a(m) + \dots + \log_a(m)}_{k \text{ parcelas } \log_a(m)} = k . \log_a(m)$$

$$4) \log_a(m) = \frac{\log_k(m)}{\log_k(a)} \Rightarrow \overbrace{\log_k(m) = \log_a(m) . \log_k(a)}^{\text{MUDANÇA DE BASE}}, \text{ sendo } \log_k(a) \text{ uma constante}$$

Prova – Considere u , v e w , de modo que:

$$\left. \begin{array}{l} m = a^u \Leftrightarrow \log_a(m) = u \\ m = k^v \Leftrightarrow \log_k(m) = v \\ a = k^w \Leftrightarrow \log_k(a) = w \end{array} \right\} \Rightarrow m = a^u = k^v$$

$$\underbrace{a^u = (k^w)^u}_{a=k^w} = k^{w.u} = k^v \Rightarrow w.u = v \Rightarrow \log_k(m) = \log_a(m) . \log_k(a)$$

5) Se $m \leq n$, então: (i) sendo $a > 1$, $\log_a(m) \leq \log_a(n)$; e (ii) no caso de $0 < a < 1$, $\log_a(m) \geq \log_a(n)$

Prova – Considere u e v , de modo que:

$$m = a^u \Leftrightarrow \log_a(m) = u$$

$$n = a^v \Leftrightarrow \log_a(n) = v$$

Das funções exponenciais, pode-se afirmar:

- (i) Sendo $a > 1$, temos: $u > v \Rightarrow a^u > a^v \Leftrightarrow a^u \leq a^v \Rightarrow u \leq v$
- (ii) Sendo $0 < a < 1$, temos: $u < v \Rightarrow a^u > a^v \Leftrightarrow a^u \leq a^v \Rightarrow u \geq v$

Portanto:

- (i) Se $a > 1$: $m = a^u \leq n = a^v \Rightarrow u = \log_a(m) \leq v = \log_a(n)$
 $m \leq n \Rightarrow \log_a(m) \leq \log_a(n)$
- (ii) Se $0 < a < 1$: $m = a^u \leq n = a^v \Rightarrow u = \log_a(m) \geq v = \log_a(n)$
 $m \leq n \Rightarrow \log_a(m) \geq \log_a(n)$

Observação – Analogamente, pode-se provar ainda o seguinte resultado: se $m > n$, então: (i) sendo $a > 1$, $\log_a(m) > \log_a(n)$; e (ii) no caso de $0 < a < 1$, $\log_a(m) < \log_a(n)$.

Função logarítmica – DEFINIÇÃO: Seja a função $\log_a: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ (inversa da função exponencial), que associa, a cada real positivo x , o número real $\log_a(x)$, denominado logaritmo de x na base a .

Os logaritmos na base 10 são conhecidos como logaritmos decimais de Briggs. Um ponto que deve ser observado é que, quando se omite a base de um logaritmo, isto significa que se considerou a base decimal. Exemplo: $\log(7)$ significa $\log_{10}(7)$.

Já os logaritmos na base e , **número de Euler** ($e \cong 2,718281828459 \dots$) são denominados naturais ou neperianos.

Convém ressaltar ainda que este número possui uma importante aplicação aos modelos de capitalização contínua, pois, quando associado a variáveis contínuas, pode ser apresentado pelas seguintes relações matemáticas, conforme GUIDORIZZI (2019, p. 133-134):

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{k \rightarrow 0} (1 + k)^{\frac{1}{k}}.$$

A importância desta relação é percebida com a introdução do seguinte exemplo:

Um capital inicial de R\$ 1,00 é aplicado a uma taxa de 100% *a. a.* durante 1 ano e gera o montante de R\$ 2,00, pois $1 \cdot (1 + 100\%)^1 = 2$. Que montante seria gerado se considerássemos 100% *a. a.* capitalizados “*n* vezes” ao ano, isto é, 100% divididos em “*n* partes iguais”? Note que o período de 1 ano equivale a estas “*n* partes”. Logo, este montante é dado por $\left(1 + \frac{100\%}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Mas há ainda outra questão: como ficaria se supuséssemos valores de *n* crescendo indefinidamente? Isto é traduzido, matematicamente, por meio da relação $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$. Assim, o número “*e*” possui o significado de representar um valor fixo para o qual os valores de $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ se aproximam, indefinidamente, à medida que *n* cresce. Portanto, para valores cada vez maiores de *n*, o montante fica sempre em torno do valor de R\$ 2,7182 ... ($\cong e$). Podemos fazer a seguinte generalização para a capitalização contínua: seja C_0 um capital inicial aplicado a uma taxa fixa de *k*% *a. a.* durante o período *t* (em anos). Desta forma, temos o seguinte montante:

$$C(t) = C_0 \cdot \overbrace{\left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k\%}{n}\right)^{n \cdot t} \right]}^{\lambda = \left(\frac{100n}{k}\right)} = C_0 \cdot \left[\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)^{\lambda \cdot \left(\frac{kt}{100}\right)} \right] =$$

$$C_0 \cdot \left[\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)^{\lambda} \right]^{\left(\frac{kt}{100}\right)} = C_0 \cdot e^{\left(\frac{kt}{100}\right)}.$$

Exemplo de Aplicação 1: Se o logaritmo de 4 na base 6 é igual a “*a*”, então o logaritmo de 32 na base 9 é:

SOLUÇÃO: $\log_6(4) = a \Leftrightarrow 6^a = 4 = 2^2$ e $\log_9(32) = x \Leftrightarrow 9^x = 32 = 2^5$

$$2 = 6^{\left(\frac{a}{2}\right)} = 9^{\left(\frac{x}{5}\right)} = 3^{\left(\frac{2x}{5}\right)} \Rightarrow \log_3\left(6^{\left(\frac{a}{2}\right)}\right) = \log_3\left(3^{\left(\frac{2x}{5}\right)}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a}{2}\right) \cdot \log_3(2 \cdot 3) = \left(\frac{2x}{5}\right) \cdot \log_3(3) = \left(\frac{a}{2}\right) \cdot (\log_3(2) + 1) = \frac{2x}{5}$$

$$\Rightarrow x = \left(\frac{5a}{4}\right) \cdot (\log_3(2) + 1) = \left(\frac{5a}{4}\right) \cdot \left(\frac{a}{2-a} + 1\right) = \frac{5a}{(4-2a)}$$

Utilizando ainda: $6^a = 2^2 \Rightarrow \log_3(6^a) = \log_3(2^2)$

$$\Rightarrow a \cdot \log_3(2 \cdot 3) = 2 \cdot \log_3(2) \Rightarrow a \cdot \log_3(2) + a = 2 \cdot \log_3(2)$$

$$\Rightarrow \log_3(2) = \frac{a}{2 - a}$$

Exemplo de Aplicação 2: Em um certo mês, dois jornais circulam com 50.000 e 300.000 exemplares diários, respectivamente. A partir de então, a circulação do primeiro cresce 8,8% a cada mês e a do segundo decresce 15% cada mês. Considerando $\log_{10}(2) = 0,30$; $\log_{10}(3) = 0,47$; e $\log_{10}(5) = 0,7$, qual o número mínimo de meses para que a circulação do primeiro jornal ultrapasse a do segundo?

$$\text{SOLUÇÃO: } (50.000) \cdot (30) \cdot (1,088)^n > (300.000) \cdot (30) \cdot (0,85)^n$$

$$(1,088)^n > 6 \cdot (0,85)^n \Rightarrow \frac{(1,088)^n}{(0,85)^n} > 6 \Rightarrow n \cdot \log_{10}\left(\frac{1,088}{0,85}\right) > \log_{10}(2) + \log_{10}(3) = 0,77$$

$$\Rightarrow n \cdot \log_{10}\left(\frac{2^5}{5^2}\right) > 0,77 \Rightarrow n \cdot (5 \cdot \log_{10}(2) - 2 \cdot \log_{10}(5)) > 0,77$$

$$\Rightarrow n \cdot (0,1) > 0,7 \Rightarrow n > 7 \therefore n_{\min} = 8 \text{ meses}$$

PROGRESSÕES

Progressão Aritmética (PA) – DEFINIÇÃO: é uma sequência em que cada termo é igual ao anterior adicionado de uma constante: razão r .

Logo, o seu termo geral (a_n) satisfaz à seguinte relação de recorrência:

$$a_n = a_{n-1} + r, \text{ de onde concluímos que } a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

$$\text{Temos ainda: } a_n = \frac{(a_{n-1} + a_{n+1})}{2} \text{ para } n \geq 2$$

A soma dos n primeiros termos de uma PA é:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

Escrevendo esta soma agora esta mesma soma de trás para frente:

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \dots + a_1$$

$$\text{Assim: } 2 \cdot S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \dots + (a_n + a_1)$$

Como, em uma PA, a soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual à soma destes extremos e como temos, ao todo, n somas, então:

$$2 \cdot S_n = (a_1 + a_n) \cdot n \Rightarrow S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

Exemplo de Aplicação 3: Determine o número de múltiplos de 3 entre 100 e 500.

SOLUÇÃO: $a_n = 498 = 102 + (n - 1) \cdot 3 \Rightarrow n = 133$

Exemplo de Aplicação 4: Em uma PA de 17 termos, o 7º termo é igual a 13 e o 11º termo é igual a 27. Calcule a soma dos termos desta PA.

SOLUÇÃO: $S_{17} = 17 \cdot \frac{(a_1 + a_{17})}{2} = 17 \cdot \frac{(a_7 + a_{11})}{2} = 17 \cdot \frac{(13 + 27)}{2} = 340$

Progressão Geométrica (PG) – DEFINIÇÃO: é uma sequência em que cada termo é igual ao anterior multiplicado por uma constante: razão $q \neq 1$.
Logo, o seu termo geral (a_n) satisfaz à seguinte relação de recorrência:
 $a_n = a_{n-1} \cdot q$, de onde concluímos que $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
Temos ainda: $a_n^2 = (a_{n-1}) \cdot (a_{n+1})$ para $n \geq 2$

A soma dos n primeiros termos de uma PG é:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = a_1 \cdot \underbrace{(1 + q + \dots + q^{n-1})}_{=S} = a_1 \cdot S = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

$$\begin{cases} S = 1 + q + \dots + q^{n-1} \\ q \cdot S = q + q^2 + \dots + q^n \end{cases} \Rightarrow q \cdot S - S = (q - 1) \cdot S = q^n - 1 \Rightarrow S = \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

O limite da soma dos termos de uma PG, em que $-1 < q < 1$, é:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q}$$

Isto porque:

$$n \rightarrow \infty \text{ e } -1 < q < 1 \Rightarrow q^n \rightarrow 0$$

Exemplo de Aplicação 5: Um carro custa hoje R\$ 18.000,00 e, após 4 anos de uso, o seu valor será R\$ 12.000,00. Supondo uma taxa de decrescimento anual constante para o valor do carro, quanto ele estará valendo após 1 ano de uso?

SOLUÇÃO: $a_5 = a_1 \cdot q^4 \Rightarrow 12.000 = 18.000 \cdot q^4 \Rightarrow q = \sqrt[4]{\frac{2}{3}}$

$$a_2 = a_1 \cdot q = 18.000 \cdot \sqrt[4]{\frac{2}{3}} = 16.264,84$$

Exemplo de Aplicação 6: Utilizando o conceito do limite da soma de uma P.G, encontre as geratrizes das seguintes dízimas periódicas: $1,454545 \dots$ e $1,2454545 \dots$

SOLUÇÃO:

$$1,454545 \dots = 1 + (0,45 + 0,0045 + 0,000045 + \dots) = 1 + \frac{0,45}{(1 - 0,01)} = \frac{16}{11}$$

$$1,2454545 \dots = 1,2 + (0,045 + 0,00045 + 0,0000045 + \dots) = 1,2 + \frac{0,045}{(1 - 0,01)} = \frac{137}{110}$$

APÊNDICE C – Apresentação realizada na Oficina de Mat. Fin. – IFRJ (Paracambi)

Oficina de Matemática Financeira:

Modelando em Matemática Financeira: Uma Perspectiva Crítica

1



SUMÁRIO:

- **PARTE 1: Juros Simples e Compostos / Taxas Equivalentes**
- **PARTE 2: Rendas Certas / Praticando com Excel**
- **PARTE 3: Modelando a compra de um automóvel por diferentes vias: Financiamento e Investimentos**

2



PARTE 1: JUROS

- Qualquer **deslocamento do dinheiro no tempo** pressupõe uma taxa de juros associada;
- Assim, para movermos o dinheiro no tempo de um período 1 para um período 2, temos que explicitar a **taxa de juros**.
- Desse modo, quando um indivíduo cede dinheiro no tempo para outro indivíduo, ele o faz por meio de uma expectativa de recebimento de **aluguel do dinheiro**, denominado **juros**.
- O dinheiro deverá ser devolvido e os juros (o aluguel) deverão ser pagos, mas esta operação possui um **risco de não pagamento**.

3



PARTE 1: JUROS

- Os juros são calculados, genericamente falando, considerando um valor para o qual dono do dinheiro estaria disposto a emprestá-lo, considerando que ele poderia investir o seu **dinheiro de outra forma** e que conhece os **riscos de não pagamento** associados.
- Observe que quem recebe o dinheiro emprestado antecipa a realização de necessidades que só seriam realizadas no futuro (**trocas intertemporais**).

4



PARTE 1: JUROS SIMPLES

- No **regime de Juros Simples**, um Capital C_0 , com uma taxa de juros i (expressa em um percentual por unidade de tempo), é aplicado em n períodos desta mesma unidade de tempo com o seguinte acréscimo a C_0 :

$$J = \underbrace{C_0 \cdot i + C_0 \cdot i + \dots + C_0 \cdot i}_{n \text{ unidades de tempo}} = C_0 \cdot i \cdot n$$

- O Montante é dado por: $M = C_0 + C_0 \cdot i \cdot n = C_0 \cdot (1 + i \cdot n)$

5



PARTE 1: JUROS COMPOSTOS

- No **regime de Juros Compostos** (utilizado no dia a dia) um Capital C_0 , com uma taxa de juros i (expressa em um percentual por unidade de tempo), é aplicado em n períodos desta mesma unidade de tempo com o seguinte Montante gerado:

$$t = 0 \rightarrow M = C_0$$

$$t = 1 \rightarrow M = C_0 \cdot (1 + i)$$

$$t = 2 \rightarrow M = [C_0 \cdot (1 + i)] \cdot (1 + i)$$

$$\vdots$$

$$t = n \rightarrow M = [C_0 \cdot \underbrace{(1 + i) \dots (1 + i)}_{n-1 \text{ vezes}}] \cdot (1 + i) = C_0 \cdot (1 + i)^n$$

$$M = C_0 \cdot (1 + i)^n \text{ e } J = C_0 \cdot [(1 + i)^n - 1]$$

6



PARTE 1: TAXAS EQUIVALENTES

- O que significa determinar uma taxa por unidade de tempo equivalente a outra estabelecida por outra unidade de tempo (**taxas equivalentes**)?
- SIGNIFICA: ter duas taxas por unidades de tempo diferentes que geram o **mesmo Montante**, considerando um mesmo período de tempo.
- Esse conceito é o de **equivalência de taxas**, que difere do de proporcionalidade de taxas (grandezas diretamente proporcionais).

7



PARTE 1: TAXAS EQUIVALENTES

➤ TAXAS EQUIVALENTES:

$$C_0 \cdot (1 + i_1)^{n_1} = C_0 \cdot (1 + i_2)^{n_2} \Rightarrow (1 + i_1)^{n_1} = (1 + i_2)^{n_2}$$

- Considere que $n_1 = 1$ e $n_2 = n$ sejam períodos de tempos equivalentes expressos com unidades diferentes. Assim:

$$1 + i_1 = (1 + i_2)^n \Rightarrow i_1 = (1 + i_2)^n - 1$$

8



PARTE 1: TAXAS EQUIVALENTES

- **TAXAS EQUIVALENTES:** Mostrar que uma taxa de 4% a.m. é equivalente a uma taxa de 8,16% ao bimestre. Suponha o capital inicial de R\$ 1.000,00.

$$1000 \cdot (1 + i)^1 = 1000 \cdot (1 + 4\%)^2 \Rightarrow i = (1,04)^2 - 1 = 1,0816 - 1 = 0,0816 = 8,16\%$$

INFLAÇÃO E EQUIVALENCIA DE TAXAS: a taxa de inflação (θ) representa um índice de redução do poder aquisitivo das pessoas. Assim, sabendo-se os juros aparentes (i_a) de um investimento e a taxa de inflação, pode-se determinar os juros reais (i_r):

$$1 + i_a = (1 + \theta) \cdot (1 + i_r)$$

9



PARTE 2: RENDAS CERTAS

- **PAGAMENTOS OU RECEBIMENTOS PERIÓDICOS E IGUAIS (Valor Futuro – VF e Valor Presente – VP):**

- Aplicação única com VP em $t = 0$ e VF em $t = n$:

$$VF = VP \cdot (1 + i)^n \Rightarrow VP = \frac{VF}{(1 + i)^n} = VF \cdot (1 + i)^{-n}$$

- Considerando pagamentos ou recebimentos periódicos (R) de $t = 1$ até $t = n$, temos o seguinte fluxo de valores:

10

PARTE 2: RENDAS CERTAS

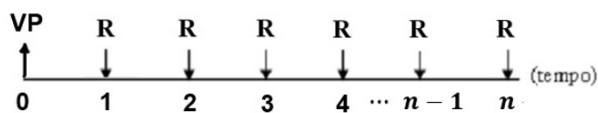


$$VP = \frac{R}{1+i} + \frac{R}{(1+i)^2} + \dots + \frac{R}{(1+i)^n}$$

$$X = \frac{R}{1+i} \Rightarrow VP = X + X \cdot (1+i)^{-1} + \dots + X \cdot (1+i)^{n-1}$$

$$PG \rightarrow a_1 = X \text{ e } q = (1+i)^{-1}$$

PARTE 2: RENDAS CERTAS



$$PG \rightarrow a_1 = X \text{ e } q = (1+i)^{-1}$$

$$PG: (a_1, a_1 \cdot q, \dots, a_1 \cdot q^{n-1}) \rightarrow \begin{cases} a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \\ S_n = a_1 + a_1 \cdot q + \dots + a_1 \cdot q^{n-1} \\ q \cdot S_n = a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \dots + a_1 \cdot q^n \\ q \cdot S_n - S_n = (q-1) \cdot S_n = a_1 \cdot q^n - a_1 \\ S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1} = \frac{X \cdot ((1+i)^n - 1)}{(1+i) - 1} \end{cases}$$

PARTE 2: RENDAS CERTAS



$$VP = X \cdot \frac{(1+i)^{-n} - 1}{(1+i)^{-1} - 1} \cdot \frac{(-1)}{(-1)} = \frac{R}{(1+i)} \cdot \frac{[1 - (1+i)^{-n}]}{[1 - (1+i)^{-1}]} = R \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n}}{(1+i) - 1}$$

$$VP = R \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \quad VF = VP \cdot (1+i)^n = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

13

PARTE 2: RENDAS CERTAS

- Pense no seguinte caso: suponha que tivéssemos uma **antecipação desses fluxos** de pagamentos ou recebimentos periódicos (R), de modo que fossem aplicados de $t = 0$ até $t = n - 1$.

- Isso quer dizer que: $VP = R + \frac{R}{1+i} + \dots + \frac{R}{(1+i)^{(n-1)}}$

- Tente desenvolver a **fórmula do VP e do VF** para esse caso específico.

14



PARTE 2: RENDAS CERTAS

$$VP = R + \frac{R}{1+i} + \dots + \frac{R}{(1+i)^{(n-1)}}$$

$$PG \rightarrow a_1 = R \text{ e } q = (1+i)^{-1}$$

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1} = \frac{R \cdot ((1+i)^{-n} - 1)}{(1+i)^{-1} - 1}$$

$$\begin{aligned} VP &= R \cdot \frac{(1+i)^{-n} - 1}{(1+i)^{-1} - 1} \cdot \frac{(-1)}{(-1)} = R \cdot \frac{[1 - (1+i)^{-n}]}{[1 - (1+i)^{-1}]} = R \cdot \frac{[1 - (1+i)^{-n}]}{\left[1 - \frac{1}{1+i}\right]} = \\ &= R \cdot \frac{[1 - (1+i)^{-n}]}{\left[\frac{i}{1+i}\right]} = R \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \cdot (1+i) \end{aligned}$$

15



PARTE 2: RENDAS CERTAS

$$VP = R + \frac{R}{1+i} + \dots + \frac{R}{(1+i)^{(n-1)}}$$

$$PG \rightarrow a_1 = R \text{ e } q = (1+i)^{-1}$$

$$VP = \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \cdot (1+i)$$

$$VF = VP \cdot (1+i)^n = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} \cdot (1+i)$$

16



PARTE 2: APLICAÇÃO

- **EXERCÍCIO 1:** Certa pessoa aceitou um empréstimo garantido pelas promissórias, a seguir discriminadas:

R\$ 10 000 no prazo de 1 mês.

R\$ 20 000 no prazo de 3 meses.

R\$ 40 000, prazo de 6 meses.

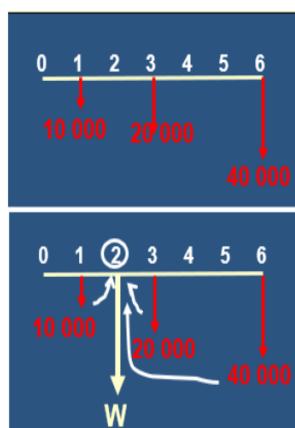
No fim do primeiro mês, na impossibilidade de pagar o primeiro título, entrou em acordo com o credor para efetuar o pagamento do total do empréstimo ao final do segundo mês. Sendo de 5 % a.m. a taxa envolvida na época do fechamento do negócio e de 15% a.m. a taxa acertada para as parcelas vencidas e não pagas, qual o pagamento global a ser feito na referida data?

17



PARTE 2: APLICAÇÃO

- **EXERCÍCIO 1: SOLUÇÃO**



$$X = 10.000 \cdot (1,15) + \frac{20.000}{1,05} + \frac{40.000}{(1,05)^4}$$

18



PARTE 2: APLICAÇÃO

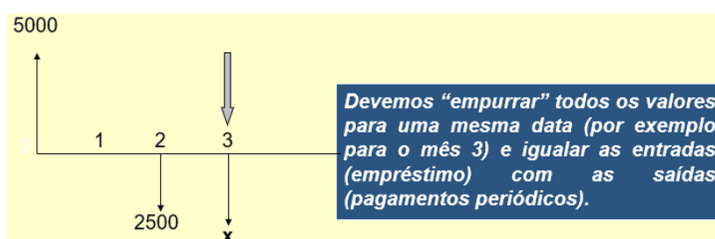
- **EXERCÍCIO 2:** Vinícius tomou um empréstimo de R\$ 5.000,00 a juros mensais de 5%. Dois meses depois, ele pagou R\$ 2.500,00 e, um mês após esse pagamento, liquidou seu débito. Qual o valor desse último pagamento?

19



PARTE 2: APLICAÇÃO

- **EXERCÍCIO 2: SOLUÇÃO**



$$-5.000 \cdot (1,05)^3 + 2.500 \cdot (1,05) + x = 0 \text{ (dívida paga)}$$

$$x = 5000 \cdot (1,05)^3 - 2500 \cdot (1,05) = 3.163,13$$

20



PARTE 2: PRATICANDO COM EXCEL

- **EXERCÍCIO 3:** Utilize o Excel para calcular as Rendas Certas (R) com o seguintes dados: $VP = R\$ 36.000,00$; $n = 36$ meses; $i = 1,8\%$ a.m. para as seguintes situações:
- Determinar R com fluxos de $t = 1$ até $t = n$ (Rendas Certas Postecipadas).
 - Determinar R com fluxos de $t = 0$ até $t = n - 1$ (Rendas Certas Antecipadas).

21



PARTE 2: PRATICANDO COM EXCEL

- **EXERCÍCIO 3:** a) Determinar R com fluxos de $t = 1$ até $t = n$ (Rendas Certas Postecipadas).

B5					=PGTO(B3;B4;B2;B1;0)				
	A	B	C	D					
1	VF	0,00							
2	VP	36.000,00							
3	Taxa	1,80%							
4	Nper	36,00							
5	PGTO	- 1.367,42							
6									

22



PARTE 2: PRATICANDO COM EXCEL

- **EXERCÍCIO 3:** a) Determinar R com fluxos de $t = 1$ até $t = n$ (Rendas Certas Postecipadas). ➤ Abrir a planilha Excel, que possui uma estrutura

	A	B	C	D
1	VF	0,00		
2	VP	36.000,00		
3	Taxa	1,80%		
4	Nper	36,00		
5	PGTO	- 1.367,42		
6				

- Abrir a planilha Excel, que possui uma estrutura matricial, em que as letras são as colunas e os números as linhas.
- Colocar os dados dos problemas como os da figura ao lado.
- Manipular a fórmula PGTO (para as anuidades), colocando “um igual” antes para aplicação dos cálculos.
- A fórmula tem 5 inputs (entradas), sendo o último o número 0, que caracteriza as rendas postecipadas no Excel. Se não colocarmos nada neste campo, a planilha entende que é 0 (postecipada).

23



PARTE 2: PRATICANDO COM EXCEL

- **EXERCÍCIO 3:** b) Determinar R com fluxos de $t = 0$ até $t = n - 1$ (Rendas Certas Antecipadas).

	A	B	C
1	VF	0,00	
2	VP	36.000,00	
3	Taxa	1,80%	
4	Nper	36,00	
5	PGTO	-R\$ 1.343,24	
6			

24



PARTE 2: PRATICANDO COM EXCEL

- **EXERCÍCIO 3:** b) Determinar R com fluxos de $t = 0$ até $t = n - 1$ (Rendas Certas Antecipadas).

	A	B	C
1	VF	0,00	
2	VP	36.000,00	
3	Taxa	1,80%	
4	Nper	36,00	
5	PGTO	-R\$ 1.343,24	
6			

24



PARTE 2: PRATICANDO COM EXCEL

➤ **EXERCÍCIO 3:** b) Determinar R com fluxos de $t = 0$ até $t = n - 1$ (Rendas Certas Antecipadas).

B5			=PGTO(B3;B4;B2;B1;1)
	A	B	C
1	VF	0,00	
2	VP	36.000,00	
3	Taxa	1,80%	
4	Nper	36,00	
5	PGTO	-R\$ 1.343,24	
6			

- Abrir a planilha Excel, que possui uma estrutura matricial, em que as letras são as colunas e os números as linhas.
- Colocar os dados dos problemas como os da figura ao lado.
- Manipular a fórmula PGTO (para as anuidades), colocando “um igual” antes para aplicação dos cálculos.
- A fórmula tem 5 inputs (entradas), sendo o último o número 1, que caracteriza as rendas antecipadas no Excel.

25



PARTE 3: MODELANDO

➤ **MODELAGEM:** COMPRA DE UM AUTOMÓVEL

- Dividir a Turma em dois ou três grupos para fazer uma modelagem de um financiamento de automóvel popular e de investimentos financeiros com foco nesta aquisição.
- Os grupos terão o intervalo de uma semana entre as aulas e ainda 30 minutos da segunda aula para realizarem esta atividade de modelagem financeira e apresentarem os principais números e conclusões que entendam merecer destaque.
- Buscar informações na Internet, em bancos e em financeiras com o objetivo de trazer dados conectados com a realidade.

26



PARTE 3: MODELANDO

➤ **MODELAGEM:** COMPRA DE UM AUTOMÓVEL

- Fazer um estudo sobre o financiamento de um automóvel nos bancos, comparando-o com um investimento bancário de R\$ 1.000,00 por mês.
- Elaborar uma planilha para resumo dos dados que se considerem necessários para esta análise.
- Estudar um pouco mais sobre os investimentos bancários e obter informações sobre a poupança e o CDB, entre outros investimentos, para verificar os que remuneram melhor e/ou não pagam impostos.

27



PARTE 3: MODELANDO

➤ **MODELAGEM:** COMPRA DE UM AUTOMÓVEL

- Analisar as opções de compra do automóvel 100% financiado, 50% financiado ou comprado com todo o investimento realizado. Discutir os aspectos qualitativos e/ou quantitativos envolvidos.

28



PARTE 3: MODELANDO

➤ **MODELAGEM:** COMPRA DE UM AUTOMÓVEL

- Observar ainda, apenas a título de exemplificação, o seguinte caso de modelagem de financiamento de automóvel:

(1) VALOR À VISTA.

(2) VALOR DA ENTRADA.

(3) VALOR DO IOF.

(4) TAXA DE CADASTRO.

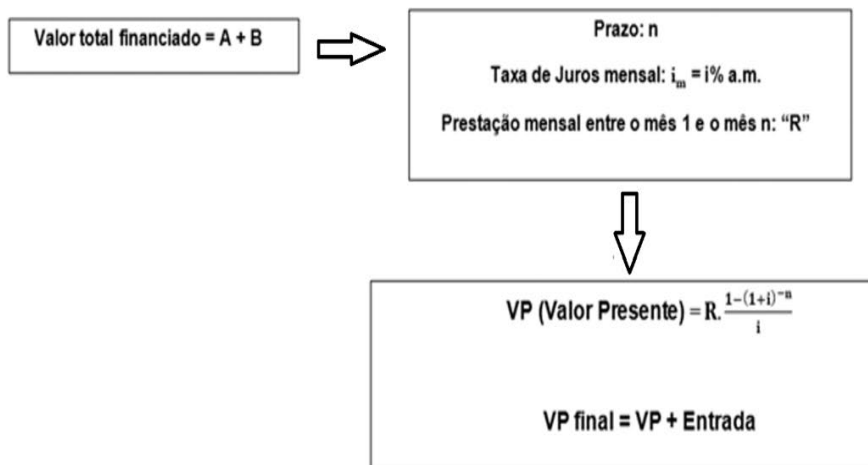
(5) CUSTOS BANCÁRIOS.

$$\Rightarrow \begin{cases} A = (1) - (2) \\ B = (3) + (4) + (5) \end{cases}$$

29



PARTE 3: MODELANDO



30



PARTE 3: MODELANDO

➤ EXEMPLO DE UMA PLANILHA COM ANÁLISE FINANCEIRA:

ESTUDO COMPRA FINANCIADA AUTOMÓVEL									
RENAULT KWID NOVO NA COR BRANCA									
BANCO ITAU									
PREÇO À VISTA R\$ 51990,00									
ENTRADA 10% R\$ 5199,00									
Mensais	Prestação	Reg. Contrato	IOF	Valor Financiado	Total a Pagar	J mensal	J anual	CET mensal	CET anual
36	1741,92	175,80	1455,13	48489,89	67908,12	1,45	18,86	1,68	22,12
48	1436,75	175,80	1515,77	48558,68	74163,00	1,52	19,84	1,71	22,58
60	1254,86	175,80	1551,07	48601,18	80490,60	1,55	20,77	1,72	22,65
ENTRADA 20% R\$ 10398,00									
Mensais	Prestação	Reg. Contrato	IOF	Valor Financiado	Total a Pagar	J mensal	J anual	CET mensal	CET anual
36	1538,60	175,80	1293,03	43121,20	65787,60	1,41	18,30	1,64	21,57
48	1266,99	175,80	1346,98	43182,37	71199,12	1,48	19,28	1,67	22,02
60	1104,42	175,80	1378,41	43220,21	76663,20	1,51	19,70	1,68	22,08
ENTRADA 30% R\$ 15597,00									
Mensais	Prestação	Reg. Contrato	IOF	Valor Financiado	Total a Pagar	J mensal	J anual	CET mensal	CET anual
36	1335,64	175,80	1130,96	37752,53	63680,04	1,36	17,60	1,59	20,88
48	1094,63	175,80	1177,98	37805,85	68139,24	1,42	18,44	1,61	21,17
60	954,41	175,80	1205,76	37839,26	72861,60	1,46	19,00	1,63	21,37

31



PARTE 3: MODELANDO

➤ EXEMPLO DE UMA PLANILHA COM ANÁLISE FINANCEIRA (Entrada de 30% e financiamento em 36 meses):

ENTRADA 30% R\$ 15597,00									
Mensais	Prestação	Reg. Contrato	IOF	Valor Financiado	Total a Pagar	J mensal	J anual	CET mensal	CET anual
36	1335,64	175,80	1130,96	37752,53	63680,04	1,36	17,60	1,59	20,88
48	1094,63	175,80	1177,98	37805,85	68139,24	1,42	18,44	1,61	21,17
60	954,41	175,80	1205,76	37839,26	72861,60	1,46	19,00	1,63	21,37

- Entrada de 30% de R\$ 51.990,00 = **R\$ 15.597,00**
 A = 51.990,00 – 15.597,00 = **R\$ 36.393,00**
 B = (IOF + Reg. Contrato) + Extras = 1.306,76 + Extras = **R\$ 1.359,53**
 A+B = Valor total financiado = **R\$ 37.752,53**

32

PARTE 3: MODELANDO

- EXEMPLO DE UMA PLANILHA COM ANÁLISE FINANCEIRA (Entrada de 30% e financiamento em 36 meses):

ENTRADA 30% R\$ 15597,00									
Mensais	Prestação	Reg. Contrato	IOF	Valor Financiado	Total a Pagar	J mensal	J anual	CET mensal	CET anual
36	1335,64	175,80	1130,96	37752,53	63680,04	1,36	17,60	1,59	20,88
48	1094,63	175,80	1177,98	37805,85	68139,24	1,42	18,44	1,61	21,17
60	954,41	175,80	1205,76	37839,26	72861,60	1,46	19,00	1,63	21,37

Taxas equivalentes: J mensal = 1,36% a.m. ↔ J anual = 17,60% a.a.

CET (Custo Efetivo Total) mensal = 1,59% a.m. ↔ CET anual = 20,88% a.a.

$$(1 + i_m)^{12} = (1 + i_a) \Rightarrow i_m = \sqrt[12]{(1 + i_a)} - 1$$

33

PARTE 3: MODELANDO

- EXEMPLO DE UMA PLANILHA COM ANÁLISE FINANCEIRA (Entrada de 30% e financiamento em 36 meses):

ENTRADA 30% R\$ 15597,00									
Mensais	Prestação	Reg. Contrato	IOF	Valor Financiado	Total a Pagar	J mensal	J anual	CET mensal	CET anual
36	1335,64	175,80	1130,96	37752,53	63680,04	1,36	17,60	1,59	20,88
48	1094,63	175,80	1177,98	37805,85	68139,24	1,42	18,44	1,61	21,17
60	954,41	175,80	1205,76	37839,26	72861,60	1,46	19,00	1,63	21,37

- Valor total financiado = R\$ 37.752,53 (VP)

- Juros cobrados (i%) = 1,36% a.m. (36 meses)

34



PARTE 3: MODELANDO

- **EXEMPLO DE UMA PLANILHA COM ANÁLISE FINANCEIRA** (Entrada de 30% e financiamento em 36 meses):

VP = 37.752,53 / i% = 1,36% a.m. / n = 36 meses

- **FÓRMULAS NO EXCEL:**

PGTO

PRESTAÇÃO (R) – FINANCIAMENTO:

-R\$ 1.333,24

35



PARTE 3: MODELANDO

- **EXEMPLO DE UMA PLANILHA COM ANÁLISE FINANCEIRA (Entrada de 30% e financiamento em 36 meses) – CET:**

VP = R\$ 36.393,00 / i% (CET) = 1,59% a.m. / n = 36 meses

- **FÓRMULAS NO EXCEL:**

PRESTAÇÃO (R) – FINANCIAMENTO:

=PGTO(1,59%;36;36393;0	
PGTO(taxa; nper; vp; [vf]; [tipo])	
	-R\$ 1.335,50

36



PARTE 3: MODELANDO

- **EXEMPLO DE UMA PLANILHA COM ANÁLISE FINANCEIRA** (Entrada de 30% e financiamento em 36 meses):

VP = 37.752,53 / i% = 1,36% a.m. / n = 36 meses

- **FÓRMULAS NO EXCEL – Total a Pagar (acumulação futura):**

=VF(			
VF(taxa; nper; pgto; [vp]; [tipo])			

=VF(1,36%;36;0;37752,53;0	
VF(taxa; nper; pgto; [vp]; [tipo])	

	VF
	-R\$ 61.396,52

37



PARTE 3: MODELANDO

- **EXEMPLO DE UMA PLANILHA COM ANÁLISE FINANCEIRA** (Entrada de 30% e financiamento em 36 meses):

$R = 1.335,64 / i\% = 1,36\% \text{ a.m.} / n = 36 \text{ meses}$

- **FÓRMULAS NO EXCEL – Total a Pagar (acumulação futura):**

=VF(			
VF(taxa; nper; pgto; [vp]; [tipo])			
=VF(1,36%;36;1335,64;0;			
VF(taxa; nper; pgto; [vp]; [tipo])			
(...)	0 - fim do período		
(...)	1 - começo do período		

VF

-R\$ 61.507,08

38



PARTE 3: MODELANDO

- **EXEMPLO DE UMA PLANILHA COM ANÁLISE FINANCEIRA** (Entrada de 30% e financiamento em 36 meses):

$R = 1.335,64 / i\% = 1,36\% \text{ a.m.} / n = 36 \text{ meses}$

- **FÓRMULAS NO EXCEL – Total a Pagar (acumulação futura):**

=VF(			
VF(taxa; nper; pgto; [vp]; [tipo])			
=VF(1,36%;36;1335,64;0;			
VF(taxa; nper; pgto; [vp]; [tipo])			
(...)	0 - fim do período		
(...)	1 - começo do período		

VF

-R\$ 61.507,08

38



PARTE 3: MODELANDO

➤ ANALISANDO: FINANCIAMENTO X INVESTIMENTOS

- ✓ Embora as fórmulas aplicadas sejam as mesmas, a interpretação do significado das prestações dos financiamentos difere da dos valores investidos uniformemente a cada período (fluxos de saída x fluxos de entrada).
- ✓ A análise da opção por investir antes de comprar ocorre em face da possibilidade de postergação da compra do carro.
- ✓ O valor do automóvel, conforme o modelo a ser adotado, pode ser considerado inalterado ou com um pequeno acréscimo, caso se invista para adquirir o veículo decorrido um certo período (poderíamos ter VF = valor do carro).

39



ANEXO – FÓRMULAS (Excel)

➤ TUTORIAL PARA AS FÓRMULAS FINANCEIRAS:

- O Excel é disposto em uma estrutura matricial, sendo subdividido em células.
- Para os cálculos programados nas fórmulas serem executados, deve-se: colocar o “símbolo de igual (=)” antes das fórmulas e se introduzir, corretamente, os valores de entrada para as variáveis requeridas.
- Assim, obtém-se o resultado final da fórmula (valor desconhecido que se deseja calcular).

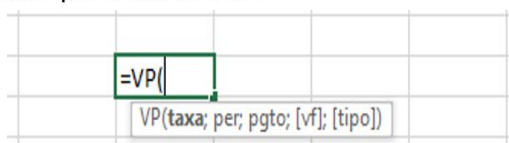
40



ANEXO – FÓRMULAS (Excel)

➤ TUTORIAL PARA AS FÓRMULAS FINANCEIRAS:

- Fórmula que retorna o VP:



Função VP

VP, uma das **funções financeiras**, calcula o valor presente de um empréstimo ou investimento com base em uma taxa de juros constante. Você pode usar VP com pagamentos periódicos e constantes (como uma hipoteca ou outro empréstimo) ou um valor futuro que é sua meta de investimento.

41



ANEXO – FÓRMULAS (Excel)

➤ TUTORIAL PARA AS FÓRMULAS FINANCEIRAS:

Sintaxe

VP(taxa, nper, pgto, [vf], [tipo])

A sintaxe da função VP tem os seguintes argumentos:

- **Taxa** Obrigatório. A taxa de juros por período. Por exemplo, se você tiver um empréstimo para um automóvel com taxa de de juros de 10% ano ano e fizer pagamentos mensais, sua taxa de juros mensal será de 10%/12 ou 0,83%. Você deveria inserir 10%/12 ou 0,83%, ou 0,0083, na fórmula como taxa.
- **Nper** Obrigatório. O número total de períodos de pagamento em uma anuidade. Por exemplo, se você conseguir um empréstimo de carro de quatro anos e fizer pagamentos mensais, seu empréstimo terá 4*12 (ou 48) períodos. Você deveria inserir 48 na fórmula para nper.

42



ANEXO – FÓRMULAS (Excel)

➤ TUTORIAL PARA AS FÓRMULAS FINANCEIRAS:

- **Pgto** Obrigatório. O pagamento feito em cada período e não pode mudar durante a vigência da anuidade. Geralmente, pgto inclui o principal e os juros e nenhuma outra taxa ou tributo. Por exemplo, os pagamentos mensais de R\$ 10.000 de um empréstimo de quatro anos para um carro serão de R\$ 263,33. Você deveria inserir -263,33 na fórmula como pgto. Se pgto for omitido, você deverá incluir o argumento vf.
- **Vf** Opcional. O valor futuro, ou o saldo, que você deseja obter depois do último pagamento. Se vf for omitido, será considerado 0 (o valor futuro de um empréstimo, por exemplo, é 0). Por exemplo, se você deseja economizar R\$ 50.000 para pagar um projeto especial em 18 anos, então o valor futuro será de R\$ 50.000. Você poderia então fazer uma estimativa conservadora na taxa de juros e concluir quanto economizaria por mês. Se vf for omitido, você deverá incluir o argumento pgto.

- **Tipo** Opcional. O número 0 ou 1 indica as datas de vencimento.

Definir tipo para	Se os vencimentos forem
0 ou omitido	No final do período
1	No início do período

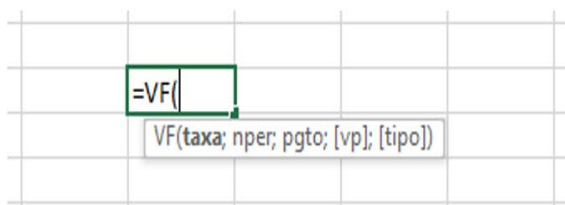
43



ANEXO – FÓRMULAS (Excel)

➤ TUTORIAL PARA AS FÓRMULAS FINANCEIRAS:

- Fórmula que retorna o VF:



Função VF

VF, uma das [funções financeiras](#), calcula o valor futuro de um investimento com base em uma taxa de juros constante. Você pode usar VF com pagamentos periódicos e constantes ou um pagamento de quantia única.

44



INSTITUTO
FEDERAL
Rio de Janeiro

ANEXO – FÓRMULAS (Excel)

➤ TUTORIAL PARA AS FÓRMULAS FINANCEIRAS:

Sintaxe

VF(taxa,nper,pcto,[vp],[tipo])

Para obter uma descrição completa dos argumentos em VF e para obter mais informações sobre as funções de anuidade, consulte VP.

A sintaxe da função VF tem os seguintes argumentos:

- **Taxa** Obrigatório. A taxa de juros por período.
- **Nper** Obrigatório. O número total de períodos de pagamento em uma anuidade.
- **Pcto** Obrigatório. O pagamento feito a cada período; não pode mudar durante a vigência da anuidade. Geralmente, pcto contém o capital e os juros e nenhuma outra tarifa ou taxas. Se pcto for omitido, você deverá incluir o argumento vp.

45



INSTITUTO
FEDERAL
Rio de Janeiro

ANEXO – FÓRMULAS (Excel)

➤ TUTORIAL PARA AS FÓRMULAS FINANCEIRAS:

- **Vp** Opcional. O valor presente ou a soma total correspondente ao valor presente de uma série de pagamentos futuros. Se vp for omitido, será considerado 0 (zero) e a inclusão do argumento pcto será obrigatória.
- **Tipo** Opcional. O número 0 ou 1 e indica as datas de vencimento dos pagamentos. Se tipo for omitido, será considerado 0.

Definir tipo para	Se os vencimentos forem
0	No final do período
1	No início do período

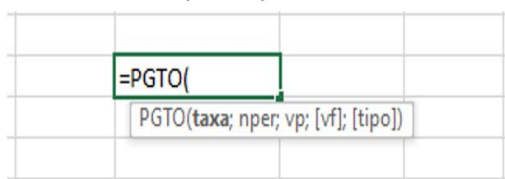
46



ANEXO – FÓRMULAS (Excel)

➤ TUTORIAL PARA AS FÓRMULAS FINANCEIRAS:

- Fórmula que retorna o R (PGTO):



Função PGTO

PGTO, uma das [funções financeiras](#), calcula o pagamento de um empréstimo de acordo com pagamentos constantes e com uma taxa de juros constante.

47



ANEXO – FÓRMULAS (Excel)

➤ TUTORIAL PARA AS FÓRMULAS FINANCEIRAS:

A sintaxe da função PGTO tem os seguintes argumentos:

- **Taxa** Obrigatório. A taxa de juros para o empréstimo.
- **Nper** Obrigatório. O número total de pagamentos pelo empréstimo.
- **Vp** Obrigatório. O valor presente, ou a quantia total agora equivalente a uma série de pagamentos futuros; também conhecido como principal.

- **Vf** Opcional. O valor futuro, ou o saldo, que você deseja obter depois do último pagamento. Se vf for omitido, será considerado 0 (o valor futuro de determinado empréstimo, por exemplo, 0).
- **Tipo** Opcional. O número 0 (zero) ou 1 e indica o vencimento dos pagamentos.

Definir tipo para	Se os vencimentos forem
0 ou omitido	No final do período
1	No início do período

48



ANEXO – FÓRMULAS (Excel)

➤ TUTORIAL PARA AS FÓRMULAS FINANCEIRAS:

- Fórmula que retorna o i% (TAXA):

`=TAXA(`
`TAXA(nper; pgto; vp; [vf]; [tipo]; [estimativa])`

Sintaxe

Taxa (nper, pgto, VP, [vf], [tipo], [suposição])

A sintaxe da função TAXA tem os seguintes argumentos:

- **Nper** Obrigatório. O número total de períodos de pagamento em uma anuidade.
- **Pgto** Obrigatório. O pagamento feito em cada período e não pode mudar durante a vigência da anuidade. Geralmente, pgto inclui o principal e os juros e nenhuma outra taxa ou tributo.

49



ANEXO – FÓRMULAS (Excel)

➤ TUTORIAL PARA AS FÓRMULAS FINANCEIRAS:

- **Vp** Obrigatório. O valor presente — o valor total correspondente ao valor atual de uma série de pagamentos futuros.
- **Vf** Opcional. O valor futuro, ou o saldo, que você deseja obter depois do último pagamento. Se vf for omitido, será considerado 0 (o valor futuro de um empréstimo, por exemplo, é 0). Se vf for omitido, deve-se incluir o argumento pgto.
- **Tipo** Opcional. O número 0 ou 1 indica as datas de vencimento.

Definir tipo para	Se os vencimentos forem
0 ou omitido	No final do período
1	No início do período

- **Estimativa** Opcional. A sua estimativa para a taxa.
 - Se você omitir estimativa, este argumento será considerado 10%.
 - Se TAXA não convergir, atribua valores diferentes para estimativa. Em geral, TAXA converge se estimativa estiver entre 0 e 1.

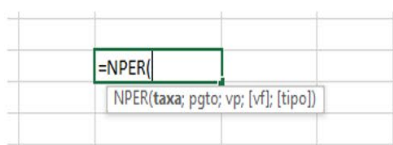
50



ANEXO – FÓRMULAS (Excel)

➤ TUTORIAL PARA AS FÓRMULAS FINANCEIRAS:

- Fórmula que retorna o n (NPER):



Sintaxe

NPER(taxa;pgto;vp,[vf],[tipo])

A sintaxe da função NPER tem os seguintes argumentos:

- **Taxa** Obrigatório. A taxa de juros por período.
- **Pgto** Obrigatório. O pagamento feito a cada período; não pode mudar durante a vigência da anuidade. Geralmente, pgto contém o capital e os juros, mas nenhuma outra tarifa ou taxas.

51



ANEXO – FÓRMULAS (Excel)

➤ TUTORIAL PARA AS FÓRMULAS FINANCEIRAS:

- **Vp** Obrigatório. O valor presente ou atual de uma série de pagamentos futuros.
- **Vf** Opcional. O valor futuro, ou o saldo, que você deseja obter depois do último pagamento. Se vf for omitido, será considerado 0 (o valor futuro de um empréstimo, por exemplo, é 0).
- **Tipo** Opcional. O número 0 ou 1 e indica as datas de vencimento.

Definir tipo para	Se os vencimentos forem
0 ou omitido	No final do período
1	No início do período

52

APÊNDICE D– Questionários Inicial e Final da Oficina de Mat. Fin. (Google Forms)

Questionário Inicial da Oficina de Mat. Fin.

Este questionário tem por objetivo fazer uma avaliação diagnóstica sobre o seu conhecimento prévio e os seus conceitos sobre a Matemática Financeira sob uma perspectiva crítica.

E-mail *

E-mail válido

Este formulário está coletando e-mails. [Alterar configurações](#)

Há quanto tempo concluiu o Ensino Médio?

- ☐ Há menos de dois anos
- ☐ Entre dois e cinco anos
- ☐ Entre cinco e dez anos
- ☐ Há mais de dez anos

A Matemática Financeira fez parte da sua formação pré-universitária?

- ☐ SIM
- ☐ NÃO

Faça esta avaliação, considerando, entre outros pontos, o nível de contextualização e de conexão com a realidade e ainda de abordagem conjunta com outros assuntos da Matemática.

AVALIAÇÃO DA MATEMÁTICA FINANCEIRA PRÉ-UNIVERSITÁRIA

Possui formação concluída em Nível Superior?

- ☐ SIM
- ☐ NÃO (posso graduação incompleta).
- ☐ NÃO (esta é a minha primeira graduação)

Se possui formação em Nível Superior, em que área foi concluída?

- ☐ Ciências Exatas (Engenharias, Física, etc.)
- ☐ Ciências Sociais Aplicadas (Economia, Administração, etc.)
- ☐ Ciências Humanas (História, Pedagogia, etc.)
- ☐ Outras Áreas
- ☐ Não aplicável (não concluí a minha primeira graduação)

Estudou Matemática Financeira em um Curso em Nível Superior?

- ☐ SIM
- ☐ NÃO

- ☐ No atual curso de graduação
- ☐ Em outro curso de graduação concluído
- ☐ Em curso de graduação não concluído
- ☐ Em curso de pós-graduação
- ☐ Em curso de extensão universitária

Comente sobre a abordagem utilizada para o ensino da Matemática Financeira no Ensino Superior no curso realizado. Responda apenas "não aplicável" se for este o seu caso.

Texto de resposta longa

Faça esta avaliação, considerando, entre outros pontos, o nível de contextualização e de conexão com a realidade e ainda de abordagem conjunta com outros assuntos da Matemática.

AValiação da Matemática Financeira Universitária

Faça esta avaliação, considerando, entre outros pontos, o nível de contextualização e de conexão com a realidade e ainda de abordagem conjunta com outros assuntos da Matemática.

AValiação da Matemática Financeira Universitária

Há quanto tempo cursa Licenciatura em Matemática?

- ☐ Há menos de um ano
- ☐ Entre um e dois anos
- ☐ Entre dois e três anos
- ☐ Entre três e quatro anos
- ☐ Há mais de quatro anos

Caso tenha cursado Matemática Financeira em uma Licenciatura em Matemática, a disciplina apresentou abordagem específica para o licenciando a ser formado nesta graduação? Responda apenas "não aplicável" se for este o seu caso.

Isto é: a abordagem contribuiu para a formação de um futuro professor de Matemática com uma prática de ensino com foco em um "aprendizado significativo"? É também importante observar se os materiais didáticos utilizados eram específicos para professores ou eram comuns a graduações de outras áreas.

AValiação da Matemática Financeira na Licenciatura em Matemática

Conhece a Modelagem Matemática como metodologia de ensino?

☐ SIM

☐ NÃO

Conhece a Educação Matemática Crítica?

☐ SIM

☐ NÃO

Caso tenha cursado Matemática Financeira em uma Licenciatura em Matemática, avalie que a disciplina foi ensinada com a abordagem da Modelagem Matemática e / ou da Educação Matemática Crítica?

☐ SIM

☐ NÃO

☐ Não aplicável

Já precisou ensinar algum tópico de Matemática Financeira? Em caso positivo, relate a sua experiência, as abordagens e estratégias utilizadas, entre outros aspectos. Responda apenas

Questionário Final da Oficina de Mat. Fin.

Descrição do formulário

E-mail *

E-mail válido

Este formulário está coletando e-mails. [Alterar configurações](#)

Em relação à Matemática Básica (razões, proporções e porcentagem), qual o grau de importância deste assunto matemático para o desenvolvimento da atividade, considerando, em escala crescente, 0 (nenhuma importância) e 5 (maior importância)?

- ☐ 0
- ☐ 1
- ☐ 2
- ☐ 3
- ☐ 4
- ☐ 5

Em relação às Progressões (aritmética e geométrica), qual o grau de importância deste assunto matemático para o desenvolvimento da atividade, considerando, em escala crescente, 0 (nenhuma importância) e 5 (maior importância)?

- ☐ 0



https://docs.google.com/forms/d/1jCwV0CYIAoheHMvMvGyr_VaVKuSU26cjlEncjQmabCg/edit

1/5

18/11/2021 23:21

Questionário Final da Oficina de Mat. Fin. (IFRJ) - Formulários Google

- ☐ 2
- ☐ 3
- ☐ 4
- ☐ 5

Em relação às Funções, qual o grau de importância deste assunto matemático para o desenvolvimento da atividade, considerando, em escala crescente, 0 (nenhuma importância) e 5 (maior importância)?

- ☐ 0
- ☐ 1
- ☐ 2
- ☐ 3
- ☐ 4
- ☐ 5

Em relação aos Logaritmos, qual o grau de importância deste assunto matemático para o desenvolvimento da atividade, considerando, em escala crescente, 0 (nenhuma importância) e 5 (maior importância)?

- ☐ 0
- ☐ 1
- ☐ 2
- ☐ 3
- ☐ 4

Em relação à Estatística, qual o grau de importância deste assunto matemático para o desenvolvimento da atividade, considerando, em escala crescente, 0 (nenhuma importância) e 5 (maior importância)?

☐ 0

☐ 1

☐ 2

☐ 3

☐ 4

☐ 5

Que assuntos não matemáticos julga que foram necessários para o desenvolvimento da atividade de modelagem com Matemática Financeira? Atribua a cada um dos assuntos destacados o seu grau de importância, considerando: 1 (baixo), 2 (médio) e 3 (alto).

Texto de resposta longa

O conjunto de todos os assuntos matemáticos e não matemáticos utilizados na oficina contribuem em que medida para que ela seja bem sucedida? Explique.

Texto de resposta longa

Considera inovadora ou usual a abordagem utilizada nesta oficina? A atividade englobou contextualizações interessantes? Já tinha visto este tipo de abordagem antes? Comente.

Texto de resposta longa

Em uma escala crescente de 0 (nenhum conhecimento) a 5 (conhecimento máximo), como julga o seu nível de conhecimento em Matemática Financeira depois da oficina?

- ☐ 0
- ☐ 1
- ☐ 2
- ☐ 3
- ☐ 4
- ☐ 5

Caso conheça a Modelagem Matemática como metodologia de ensino, considera que esta atividade desenvolveu-se sob os seus princípios pedagógicos?

- ☐ SIM
- ☐ NÃO
- ☐ Não aplicável

ANEXO – Material para a OBMEP sobre Financiamentos

(Disponível em: <<https://portaldaobmep.impa.br/index.php/modulo/ver?modulo=90&tipo=7>>)

Material Teórico - Módulo de MATEMÁTICA FINANCEIRA**Financiamentos****Primeiro Ano do Ensino Médio**

Autor: Prof. Francisco Bruno Holanda
Autor: Prof. Antonio Caminha Muniz Neto

20 de agosto de 2018



1 Introdução

Neste material, iremos aplicar os tópicos que aprendemos nos materiais anterior em um tema de extrema importância, não só para aqueles que desejam aprender matemática financeira, mas também para todas as pessoas que contraem dívidas ou realizam financiamentos para a compra de bens de alto custo, como automóveis e imóveis.

Quando compramos uma casa, por exemplo, assinamos um *contrato de hipoteca* com uma *instituição financeira* (um banco, por exemplo). Nesse contrato, fica acordado que a instituição nos emprestará o dinheiro necessário para efetivar a compra do imóvel, em troca de pagamentos periódicos futuros.

Esses pagamentos possuem duas funções: parte deve pagar os juros correspondentes à atualização monetária da dívida e o restante serve para *amortizar*, ou seja, diminuir o saldo devedor original. A estrutura de pagamentos ao longo do tempo recebe o nome de **sistema de amortização**.

Ao longo deste material, abordaremos os dois tipos de sistema de amortização adotados no sistema financeiro brasileiro: o *sistema Price* e o *sistema de amortização constante* (SAC). Porém, existem ainda o sistema americano, o sistema alemão e o sistema misto.

Na próxima seção, introduziremos o conceito de tabela de amortização que é a mesma para todos sistemas de amortização, independentemente de suas características próprias.

2 Tabela de amortização

Considere a situação na qual um indivíduo toma emprestado uma quantia S_0 a uma taxa de juros i , que deve ser paga nos próximos n períodos. O processo de amortização se dará ao final dos períodos de 1 a n , e pode ser descrito nos seguintes itens:

- O pagamento a ser realizado no período k será denotado por P_k ; o saldo devedor imediatamente após o pagamento do período k será denotado por S_k .
- Para $k \geq 1$, entre os períodos $k-1$ e k há incidência de J_k juros sobre o saldo devedor S_{k-1} .
- Dessa forma, o pagamento P_k deve ser suficiente para cobrir os juros $J_k = S_{k-1} \cdot i$ da dívida, bem como amortizar parte da dívida original. Essa amortização será denotada por A_k .
- Além disso, os pagamentos devem ser tais que o saldo devedor após o último período seja igual a zero.

As informações acima podem ser prontamente resumidas no conjunto de equações (1), as quais são válidas para

qualquer sistema de amortização.

$$\begin{aligned} J_k &= S_{k-1} \cdot i; \\ P_k &= J_k + A_k. \\ S_n &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Delas, decorre também a composição do saldo devedor S_{k+1} , descrita a seguir:

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + J_{k+1} - P_{k+1} \\ &= S_k + \cancel{J_{k+1}} - A_{k+1} - \cancel{J_{k+1}} \\ &= S_k - A_{k+1}. \end{aligned}$$

A seguir, apresentamos a chamada **tabela de amortização** (1), que pode ser construída facilmente em Excel de forma recursiva, utilizando as identidades acima.

Tabela 1: tabela de amortização.

Período	Juros	Amortiz.	Pagam.	Saldo Devedor
0				S_0
1	J_1	A_1	P_1	S_1
2	J_2	A_2	P_2	S_2
3	J_3	A_3	P_3	S_3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n-1$	J_{n-1}	A_{n-1}	P_{n-1}	S_{n-1}
n	J_n	A_n	P_n	S_n

3 Sistema de amortização constante (SAC)

No sistema de amortização constante, todas as amortizações são iguais, ou seja:

$$A_1 = A_2 = \dots = A_n = A.$$

Iterando a recorrência $S_k = S_{k-1} - A_k$, obtemos

$$S_k = S_0 - A_1 - A_2 - \dots - A_k. \quad (2)$$

Fazendo $k = n$ e utilizando o fato de que $S_n = 0$ e a amortização é constante, temos:

$$0 = S_n = S_0 - \underbrace{(A + A + A + \dots + A)}_{n \text{ vezes}} = S_0 - nA,$$

de modo que

$$A = \frac{S_0}{n}.$$

Além disso,

$$S_k = S_0 - kA = S_0 - \frac{kS_0}{n} = \frac{S_0(n-k)}{n}.$$

Consequentemente,

$$J_k = S_{k-1} \cdot i = \frac{S_0(n - (k - 1))i}{n} = \frac{S_0(n - k + 1)i}{n}$$

e

$$\begin{aligned} P_k &= J_k + A_k \\ &= \frac{S_0(n - k + 1)i}{n} + \frac{S_0}{n} \\ &= \frac{S_0(ni + 1)}{n} - (k - 1) \frac{S_0 i}{n}. \end{aligned}$$

Em particular, veja que os valores dos pagamentos são decrescentes ao longo do tempo e que são termos de uma progressão aritmética.

Vejamos o sistema SAC em ação nos dois exemplos a seguir.

Exemplo 1. Geovana contratou um empréstimo de 1.000 reais pelo SAC a uma taxa de juros de 3% ao mês. Ela irá realizar o pagamento em quatro parcelas mensais. Faça a tabela de amortização e diga qual é o valor da última prestação.

Solução. No primeiro período o empréstimo é feito, gerando um saldo devedor de $S_0 = 1.000$, porém não há pagamento nesse mês. Sabemos que no SAC as amortizações são constantes. Sendo assim, cada amortização é igual a $A = \frac{1000}{4} = 250$. Veja que a taxa de juros é de 3% ao mês, gerando um total de $J_1 = \frac{3}{100} \cdot 1.000 = 30$ reais em juros no primeiro período. Assim, se o saldo devedor ao final do período 1 é $S_1 = 1000 - 250 = 750$, o valor do pagamento será $P_1 = 250 + 30 = 280$.

Período	Juros	Amort.	Pagam.	Saldo Dev.
0				1000
1	30	250	280	750

Continuando para o segundo período, os juros serão de $J_2 = 3\% \cdot 750 = 22,50$ e o pagamento será de $P_2 = 250 + 22,50 = 272,50$. Temos, então, a tabela a seguir:

Período	Juros	Amort.	Pagam.	Saldo Dev.
0				1000
1	30	250	280	750
2	22,50	250	272,50	500

Por fim, para os últimos dois períodos, temos sucessivamente $J_3 = 3\% \cdot 500 = 15$ e $P_3 = 250 + 15 = 265$; $J_4 = 3\% \cdot 250 = 7,50$ e o pagamento será de $P_4 = 250 + 7,50 = 257,50$. A tabela de amortização completa é como a seguir:

□

Exemplo 2. Na Figura 1, apresentamos gráficos que mostram como os valores de juros, amortizações, pagamentos e saldos devedores se comportam ao longo do tempo no

Período	Juros	Amort.	Pagam.	Saldo Dev.
0				1000
1	30	250	280	750
2	22,50	250	272,50	500
3	15	250	265	250
4	7,50	250	257,50	0

sistema SAC. Tais gráficos são relativos a um empréstimo no valor de $S_0 = 200.000$, financiado em $n = 360$ meses a uma taxa de $i = 1\%$ ao mês. Como exercício, sugerimos ao leitor escrever as primeiras linhas da tabela de amortização correspondente a essa situação, a fim de convencer-se de que os formatos dos gráficos são os apresentados.

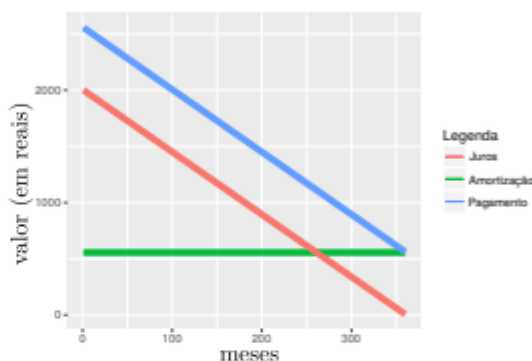


Figura 1: gráfico da tabela SAC.

4 Sistema Price

O sistema Price, também é chamado de sistema francês de amortização, recebe este nome em homenagem a Richard Price, que o apresentou pela primeira vez em 1771 no seu livro "Observações sobre Pagamentos Remissivos".

No sistema Price de amortização, o valor da parcela é constante. Além disso, sendo i a taxa mensal de juros, n o número de períodos e S_0 o saldo devedor inicial, o valor P dos pagamentos é dado pela relação

$$P = \frac{S_0 i}{1 - (1 + i)^{-n}}. \quad (3)$$

O número $\frac{i}{1 - (1 + i)^{-n}}$ é chamado de **fator de recuperação de capital**.

Antes de nos debruçarmos sobre o problema geral do cálculo de juros, amortizações e saldos devedores no sistema Price, examinemos o seguinte

Exemplo 3. Marcos deseja comprar um carro no valor de 20.000 reais e achou um banco que aceitou financiar este

valor pelo sistema Price, cobrando uma taxa de 2,5% ao mês. Calcule o valor da prestação nos seguintes casos:

a) $n = 24$ meses.

b) $n = 48$ meses.

Solução. Para encontrarmos o valor do pagamento mensal, basta aplicarmos os valores $S_0 = 20.000$ e $i = 2,5\%$, juntamente com o respectivo valor de n , na relação (3). Com o auxílio de uma calculadora ou computador, obtemos

$$a) P = \frac{20000 \cdot 0,025}{1 - (1 + 0,025)^{-24}} \cong 1.118,25.$$

$$b) P = \frac{20000 \cdot 0,025}{1 - (1 + 0,025)^{-48}} = 720,11.$$

□

Ainda em relação ao exemplo anterior, veja que, ao dobrarmos o tempo do financiamento (de 24 para 48 meses), o valor do pagamento mensal não diminui pela metade, mesmo que mantenhamos a taxa de juros (2,5%). Isto se deve ao fato de um financiamento mais longo estar relacionado a um pagamento total de juros maior. Intuitivamente, isso ocorre porque passa-se mais tempo pagando juros ao banco.

Para calcular os valores dos juros, amortizações e saldos devedores no sistema Price, partimos da última identidade das amortizações: $S_{k+1} = S_k + J_{k+1} - P_{k+1}$. Como $J_{k+1} = S_k \cdot i$ e $P_{k+1} = P$, temos $S_{k+1} = S_k(1+i) - P$. Reescrevendo essa última relação com $k-1$ no lugar de k , obtemos o par de equações:

$$S_{k+1} = S_k(1+i) - P$$

$$S_k = S_{k-1}(1+i) - P$$

Subtraindo uma da outra membro a membro, encontramos

$$S_{k+1} - S_k = (S_k - S_{k-1})(1+i),$$

ou seja (novamente da última identidade das amortizações)

$$A_{k+1} = A_k(1+i).$$

Então, percebemos que a sequência $(A_k)_{k \geq 1}$ é uma progressão geométrica (PG) de razão $1+i$. Como $A_1 = P - S_0 i$, temos que

$$A_k = A_1(1+i)^{k-1} = (P - S_0 i)(1+i)^{k-1}.$$

Utilizando novamente (2) (que, conforme vimos, é válida para qualquer sistema de amortização), juntamente com a fórmula para a soma dos termos de uma PG, obtemos

$$\begin{aligned} S_k &= S_0 - (A_1 + A_2 + \dots + A_k) \\ &= S_0 - \frac{A_k(1+i) - A_1}{(1+i) - 1} \\ &= S_0 - \frac{A_1(1+i)^k - A_1}{i} \\ &= S_0 - \frac{(P - S_0 i)((1+i)^k - 1)}{i}. \end{aligned}$$

Por fim, uma vez que $J_k = S_{k-1} \cdot i$, segue do que fizemos acima que

$$J_k = S_0 i - (P - S_0 i)((1+i)^{k-1} - 1).$$

Exemplo 4. Geovana contratou um empréstimo de 1.000 reais pelo sistema Price a uma taxa de juros de 3% ao mês. Ela irá realizar o pagamento em quatro parcelas mensais. Faça a tabela de amortização e diga qual é o valor da última prestação.

Solução. No primeiro período o empréstimo é feito, gerando um saldo devedor de $S_0 = 1.000$, porém não há pagamento neste mês. Sabemos que no sistema Price os pagamentos são constantes. Neste caso, segue de (3) que cada pagamento é igual a

$$P = \frac{1.000 \cdot 0,03}{1 - (1 + 0,03)^{-4}} \cong 269,03.$$

Veja que a taxa de juros é de 3% ao mês, gerando um total de $J_1 = \frac{3}{100} \cdot 1.000 = 30$ reais em juros no primeiro período. Assim, a amortização do primeiro período será $A_1 = 269,02 - 30 = 239,02$ e o saldo devedor será $S_1 = 1000 - 239,02 = 760,98$. Obtemos, portanto, as duas primeiras linhas da tabela de amortização:

Período	Juros	Amort.	Pagam.	Saldo Dev.
0				1000
1	30	239,03	269,03	760,98

Continuando para o segundo período, os juros serão de $J_2 = 3\% \cdot 760,98 = 22,83$, enquanto a amortização será $A_2 = P - J_2 = 269,03 - 22,83 = 246,20$ e o saldo devedor de $S_2 = S_1 - A_2 = 760,98 - 246,20$. A tabela de amortização ganha sua terceira linha:

Período	Juros	Amort.	Pagam.	Saldo Dev.
0				1000
1	30	239,03	269,03	760,98
2	22,83	246,20	269,03	514,78

Por fim, para o terceiro período, temos $J_3 = 3\% \cdot 514,78 = 15,44$, com amortização $A_3 = 269,03 - 15,44 = 253,59$ e saldo devedor será $S_3 = S_2 - A_3 = 514,78 - 253,59 = 261,19$; para o quarto e último período, temos $J_4 = 3\% \cdot 261,19 = 7,83$, $A_4 = 269,03 - 7,83 = 261,20$ e $S_4 = S_3 - A_4 = 261,19 - 261,20 = -0,01$.

Observação: o valor residual $S_4 = -0,01$ ocorre apenas devido às aproximações que fizemos ao longo da construção da tabela. Na prática, esses erros residuais são incorporados à última parcela.

□

Período	Juros	Amort.	Pagam.	Saldo Dev.
0				1000
1	30	239,03	269,03	760,98
2	22,83	246,20	269,03	514,78
3	15,44	253,59	269,03	271,19
4	7,83	261,20	269,03	-0,01

Exemplo 5. Na Figura 2, apresentamos os gráficos que mostram como os valores de juros, amortizações, pagamentos e saldos devedores se comportam ao longo do tempo no sistema Price. Tais gráficos são relativos a um empréstimo no valor de $S_0 = 200.000$, financiado em $n = 360$ meses a uma taxa de $i = 1\%$ ao mês. Como exercício, sugerimos ao leitor escrever as primeiras linhas da tabela de amortização correspondente a essa situação, a fim de convencer-se de que os formatos dos gráficos são os mostrados.

Compare essa figura com a Figura 1. Veja que o valor do pagamento é inicialmente maior na tabela SAC em detrimento da tabela Price, mas que este valor vai diminuindo ao longo do tempo e que eventualmente torna-se menor do que o pagamento fixo da tabela Price.

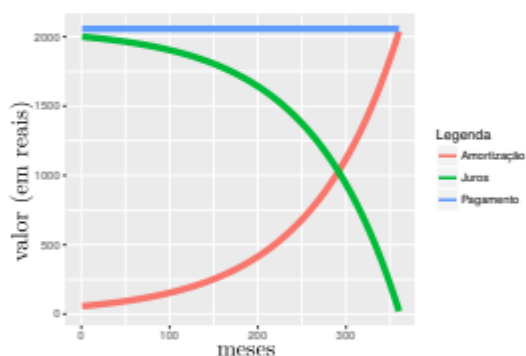


Figura 2: gráfico da tabela Price.

Sugestões ao Professor

Recomenda-se que o professor utilize pelo menos dois encontros de 100 minutos cada para apresentar o conteúdo presente neste material. No primeiro encontro, ensine os princípios básicos do sistema SAC e resolva os exercícios. Se possível, preencha as tabelas de amortização utilizando algum software para criação de planilhas; faça isso passo a passo, sem pressa. No segundo encontro, repita a mesma metodologia para o sistema Price.

Um dica interessante é recriar os gráficos presentes neste material (e outros semelhantes) utilizando o Geogebra ou

até mesmo os softwares de planilhas. É possível encontrar mais exercícios sobre amortizações nos livros recomendados na bibliografia.

Referências

- [1] A. ASSAF NETO. *Matemática Financeira e suas Aplicações*. Atlas, 2008.
- [2] A. BRUNI and R. FAMA. *Matemática Financeira com HP 12C e Excel*. Atlas, 2008.
- [3] J. M. GOMES and W. F. MATHIAS. *Matemática Financeira*. Atlas, 2009.
- [4] Augusto C. Morgado, Eduardo Wagner, and Sheila C. Zani. *Progressões e Matemática Financeira*. SBM, 2015.